

# OAF

# olimpiada argentina de fisica

## cuadernillo de prácticas



# TEORÍA DE ERRORES



La Olimpiada Argentina de Física, es una actividad creada y desarrollada en el seno de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF), de la Universidad Nacional de Córdoba.

Por resolución Nro. 612/98 del Honorable Consejo Superior de la Universidad Nacional de Córdoba, el Programa Olimpiada Argentina de Física forma parte de las actividades de extensión de esa casa de altos estudios.

Desde el año 1994, el Ministerio de Educación de la Nación auspicia y financia esta actividad.

La Olimpiada también es auspiciada por la Asociación Física Argentina (AFA).

### **Responsable Legal**

Dra. Esther Galina (Decana Famaf)

### **Responsable Pedagógico**

Dr. Gustavo Monti

### **Comité Organizador Ejecutivo de OAF**

Dr. Gustavo Monti

Dr. Guillermo Aguirre Varela

### **Consejo Académico de OAF**

Dr. Rodrigo Bürgesser

Dr. Sergio Ceppi

Dr. Carlos Condat

Dr. Axel Dente

Dr. Pedro Lamberti

Dra. Silvina Pérez

Dr. Rodolfo Pereyra

Dr. Guillermo Stutz

Dr. Alberto Wolfenson

## esto para qué sirve? cómo lo uso?...

Este cuadernillo está pensado como otro instrumento (además de entrenamientos, pruebas preparatorias, pruebas locales, concursos de videos...) para acercar a docentes y alumnos en la actividad “Olimpiadas de Física”, en particular a la parte experimental.

**Medir** requiere de un entrenamiento, de cierta práctica, de conocer las magnitudes a medir y saber elegir y tener algún manejo de los aparatos con los que se realizarán las mediciones.

Para planificar, realizar, evaluar y analizar las mediciones y/o los aparatos utilizados, es necesario entrar en contacto con la teoría de errores o “incertidumbres”; por ello, presentamos aquí, de manera sucinta, algunos elementos de la misma.

Esperamos que los alumnos intenten y logren realizar el análisis de datos e incertidumbres de diferentes situaciones experimentales que lleven a cabo. Por supuesto, esto no será posible sin que los docentes asesoren, ayuden y guíen a sus estudiantes.



## Teoría de errores

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia que puede determinarse cuantitativamente. Para asignar un valor numérico a una magnitud física es necesario utilizar *instrumentos de medición* y un *método de medición*.

El valor numérico de la magnitud física  $x$  se informa de la siguiente manera,

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)[unidades]$$

El valor de  $x$  se toma como el valor más representativo de la medición ( $\bar{x}$ ) junto con el error de este valor ( $\Delta x$ ). Es decir, se informa el intervalo dado por

$$[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$$

donde se encuentra el valor más representativo de  $x$ .

Si bien existen casos donde se acepta que el error se exprese con más de una cifra significativa, en este apunte se utilizará una sola cifra significativa para informar el error de la medición y esto determinará con cuantas cifras decimales se expresará el valor de  $\bar{x}$ .

### Ejemplo

Dada una medición de masa, se obtiene que el valor más representativo es  $\bar{x} = 2,2421g$  y  $\Delta x = 0,1g$ , entonces el valor de la masa se expresa como  $x = (2,2 \pm 0,1)g$ .

### Ejercicio

Indique la/s opción/es que informan correctamente el valor de una magnitud física.

- ☐  $l = (10 \pm 0,1) \text{ m}$
- ☐  $m = (0,78 \pm 0,3) \text{ g}$
- ☐  $t = (1,12 \pm 0,02) \text{ s}$
- ☐  $V = (23 \pm 1,6)$
- ☐  $i = (100 \pm 5) \text{ mA}$

## Errores

El valor de  $\Delta x$  está asociado a limitaciones en los instrumentos y al método de medición así como al observador, y estos pueden clasificarse como:

- **de apreciación:** mínima división que se puede resolver con el instrumento de medición.

Por ejemplo, si se quiere determinar la masa de un cuerpo utilizando una balanza con una apreciación de  $10g$ , no se podrá distinguir si la masa pesa  $1,01\text{ kg}$  ó  $1,014\text{ kg}$  porque la balanza no es capaz de distinguir esta diferencia.

- **de exactitud:** error absoluto con el que el instrumento de medición ha sido calibrado.

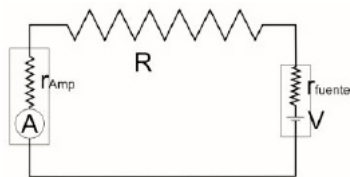
Los instrumentos de medición (como una regla) han sido calibrados con respecto a un valor patrón (metro patrón). Si la calidad de la calibración no ha sido buena o si, dadas las condiciones de trabajo, esta

calibración ha cambiado, el instrumento de medición no arrojará mediciones confiables. Sin embargo, en este apunte, se asumirá que todos los instrumentos están bien calibrados.

- **de interacción:** es debido a la interacción del método de medición con el objeto a medir.

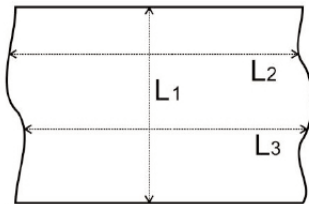
Este tipo de error se presenta, por ejemplo, cuando se quiere determinar el valor de una resistencia  $R$  utilizando la ley de Ohm. Para ello se mide la corriente que circula por la resistencia  $R$  cuando esta es conectada a una diferencia de voltaje  $V$  generada por una fuente de voltaje continuo. Para realizar la medición se utiliza un amperímetro conectado en serie a la resistencia y en general se asume al amperímetro como ideal. Sin embargo, el amperímetro posee una resistencia interna ( $r_{Amp}$ ) que afecta a la medición. Entonces la resistencia total del circuito no es  $R$  sino  $(R + r_{Amp})$  por lo que el valor de la corriente medida ( $i_m$ ), es menor que la corriente ( $i$ ) que circula por el circuito cuando no está conectado el amperímetro.

$$i_m = \frac{V}{R + r_{Amp}} < \frac{V}{R} = i$$



Medición de la corriente

- **de definición:** asociado con la falta de definición de la magnitud a medir. Este tipo de error se presenta, por ejemplo, cuando se quiere asignar un valor a la longitud de un objeto con bordes irregulares. En la figura (a continuación) se observa que la longitud  $L_1$  está bien definida pero, en cambio, la longitud transversal no ( $L_2$   $L_3$ ).



Medición de la longitud de un objeto

Los errores pueden clasificarse en:

- **errores sistemáticos:** se originan por imperfecciones en el método de medición y afectan a los resultados siempre en el mismo sentido, esto es, por defecto o por exceso. Estos errores se pueden detectar y corregir.
- **errores estadísticos:** se producen al azar y pueden cometerse, con

igual probabilidad, por defecto y por exceso. A estos errores se los puede reducir considerablemente.

- **errores ilegítimos o espurios:** se deben a errores en fórmulas o cálculos.

Los errores pueden expresarse de distintas maneras:

- **error absoluto:** error combinado de todos los errores  $\Delta x$ . Tiene la misma unidad que la magnitud.
- **error relativo:** cociente entre el error absoluto y el valor más representativo de la medición ( $\bar{x}$ )  
$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$
- **error relativo porcentual:** error relativo por 100.

## Ejercicios

1. Indique la apreciación de los siguientes instrumentos de medición,
  - a) Regla graduada.
  - b) Cronómetro.
  - c) Balanza.
  - d) Voltímetro.
  - e) Termómetro.

2. Indicar el error relativo de las siguientes magnitudes,

a)  $a = (10.2 \pm 0.1) \text{ m}$

b)  $a = (10 \pm 1) \text{ m}$

c)  $a = (220.7 \pm 0.5) \text{ m}$

### Error de una magnitud que se mide una sola vez

El valor más representativo se toma como el valor medido y se toma como error de la medición la apreciación del instrumento. En algunos casos es posible distinguir un valor menor que la apreciación del instrumento, en cuyo caso se acepta que éste sea utilizado como el error. Un ejemplo es la regla con una apreciación de  $1 \text{ mm}$  ya que es posible distinguir en la misma  $0.5 \text{ mm}$ .

Asimismo, en el instrumento de medición está incluido el operador por lo cual, en algunos casos, es necesario determinar previamente el error a asignar a la medición.

En este último caso, un ejemplo es el cronómetro, cuya apreciación es usualmente de  $0.01 \text{ s}$  pero se debe tener en cuenta el tiempo de reacción del operador. Una forma de determinar el error asociado a mediciones con un cronómetro es iniciar y detener el cronómetro lo más rápido posible y utilizar el error asociado a la dispersión obtenida como error para la medición con cronómetro (ver sección siguiente).

## Error de una magnitud que se mide directamente N veces

En orden de minimizar los errores estadísticos se realizan varias mediciones de la misma magnitud. Debido a la naturaleza azarosa de estos errores, el promedio de los distintos valores medidos estará menos afectado por estos errores.

Dada N mediciones de una misma magnitud, utilizando el mismo método de medición y realizadas por el mismo observador, con resultados  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , el valor más representativo de la medición de la magnitud  $x$  es el promedio dado por,

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

Sea  $\Delta x_j = x_j - \bar{x}$  la desviación de cada medición respecto del valor más representativo, se define el error cuadrático medio o desviación estándar  $S_x$  como,

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2$$

$S_x$  da una idea acerca de la dispersión de los valores medidos respecto al



valor promedio, y como tiene las mismas dimensiones físicas que  $\bar{x}$ , ambos valores se pueden comparar. Y este valor ( $S_x$ ) se toma como error de la medición,  $\Delta x = S_x$ .

De esta manera se informa el intervalo dado por  $[\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x]$ , donde se encuentra el valor más representativo de  $x$  con una probabilidad del 68%. Es decir, si se realizarán 100 mediciones, 68 de ellas arrojarían un valor en dicho intervalo.

El error relativo dado por el cociente  $S_x / \bar{x}$  es en general una constante que depende del proceso de medición y no disminuye al aumentar el número  $N$  de mediciones (si se realiza un número suficientemente grande de mediciones)

**Desde un punto de vista físico, el error en  $\bar{x}$  solo puede ser igual o del mismo orden que la apreciación del instrumento de medición ( $\Delta_{inst}$ ).** Esto permite tener un criterio para decidir cuál es el número óptimo de mediciones ( $N_{op}$ ) a realizar,

$$N_{op} = \left( \frac{S_x}{\Delta_{inst}} \right)^2$$

Una manera útil de visualizar la calidad de las mediciones es confeccionar un **histograma**. Para ello se realizan los siguientes pasos,

1. Se determina el *rango de los datos*, que es el intervalo definido por

la diferencia entre el mayor valor ( $x_{max}$ ) y el menor ( $x_{min}$ ) del conjunto de mediciones,

2. Se divide al rango de los datos en  $m$  sub-intervalos iguales. El número  $m$  se denomina *número de clases* y para determinar su valor se utiliza como criterio el número entero superior al valor de la raíz cuadrada del número total de mediciones.
3. Se determina la *longitud de clases* como el cociente entre el *rango de datos* y el *número de clases*.
4. Se determina el *rango de clases* como los puntos ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ) que determinan los punto extremos de los sub-intervalos.
5. Se determina la cantidad de mediciones  $n_j$  que caen en el intervalo ( $y_j, y_{j+1}$ ) para todos los sub-intervalos. Con estos valores se determina la función distribución  $f_j$  para cada sub-intervalo  $j$  como,

$$f_j = \frac{n_j}{N}$$

6. Se confecciona el gráfico de  $f_j$  en función de

$$x_j = \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1})$$

## Ejemplo

$l(m)$	$l(m)$	$l(m)$	$l(m)$	$l(m)$	$l(m)$	$l(m)$	$l(m)$
10.370	10.776	10.453	10.369	10.531	10.557	10.575	10.657
10.530	10.300	10.604	10.611	10.413	10.472	10.532	10.520
10.269	10.493	10.841	10.43	10.504	10.510	10.807	10.547
10.401	10.311	10.408	10.223	10.590	10.571	10.652	10.406
10.522	10.551	10.307	10.350	10.360	10.540	10.683	10.604
10.234	10.643	10.417	10.566	10.545	10.495	10.684	10.388
10.595	10.497	10.673	10.713	10.361	10.238	10.728	10.574
10.175	10.820	10.536	10.135	10.525	10.456	10.180	10.236
10.597	10.180	10.520	10.458	10.719	10.174	10.268	10.486
10.266	10.504	10.608	10.386	10.574	10.396	10.671	10.615
10.377	10.596	10.739	10.459	10.717	10.532	10.697	10.402
10.346	10.456	10.556	10.523	10.558	10.315	10.442	10.780
10.829	10.530	10.297	10.423	10.437	10.504	10.769	10.317
10.429	10.410	10.446	10.458	10.814	10.380	10.597	10.284
10.622	10.454	10.495	10.718	10.464	10.143	10.734	10.477
10.672	10.650	10.510	10.398	10.305	10.647	10.151	10.425
10.305	10.288	10.217	10.661	10.627	10.596	10.790	10.324
10.696	10.418	10.625	10.258	10.577	10.593	10.269	10.755
10.554	10.376	10.452	10.768	10.564	10.528	10.838	10.585
10.493	10.795	10.599	10.639	10.295	10.457	10.216	10.446
10.360	10.204	10.456	10.614	10.422	10.643	10.850	10.686
10.557	10.712	10.422	10.332	10.514	10.458	10.644	10.675
10.316	10.514	10.523	10.455	10.766	10.573	10.520	10.444
10.342	10.837	10.355	10.468	10.180	10.648	10.379	10.268
10.712	10.429	10.691	10.738	10.520	10.413	10.485	10.517

Para todas las mediciones presentadas en la tabla el error es,  $\Delta l = 0,001m$

De la tabla se obtiene los valores  $x_{max}=10,850$  y  $x_{min}=10,135$  (valores sombreados), por lo cual el *rango de los datos* es,

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = 0,715$$

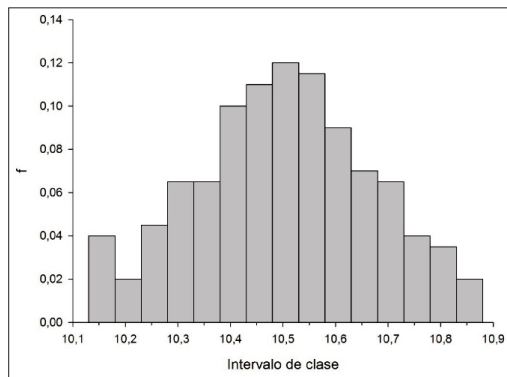
Dado el número total de mediciones  $N$ , el *número de clase* ( $m$ ) se determina

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{200} \cong 14,1 \Rightarrow m = 15$$

La *longitud de clase*  $\Delta y$

$$\frac{\Delta x}{m} \cong 0,0476 \Rightarrow \Delta y = 0,05$$

Intervalo de Clase	Límites reales	n	f
10,155	10,13 - 10,18	8	0,04
10,205	10,18 - 10,23	4	0,02
10,255	10,23 - 10,28	9	0,045
10,305	10,28 - 10,33	13	0,065
10,355	10,33 - 10,38	13	0,065
10,405	10,38 - 10,43	20	0,1
10,455	10,43 - 10,48	22	0,11
10,505	10,48 - 10,53	24	0,12
10,555	10,53 - 10,58	23	0,115
10,605	10,58 - 10,63	18	0,09
10,655	10,63 - 10,68	14	0,07
10,705	10,68-10,73	13	0,065
10,755	10,73-10,78	8	0,04
10,805	10,78-10,83	7	0,035
10,855	10,83-10,88	4	0,02



## Propagación de errores

Existen magnitudes que no se miden directamente sino que se derivan de otras magnitudes que si son medidas directamente.

Por ejemplo, sea  $V$  una magnitud que se determina a través de las magnitudes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc.,

$$V = V(x, y, z, \dots)$$

Y sean  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , etc., los errores correspondientes a las magnitudes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc. Entonces el error en  $V$  estará determinado por los valores de las magnitudes y de sus errores respectivos,

$$\Delta V = \Delta V(x, y, z, \dots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots)$$

Para el caso que  $V(x, y, z, \dots)$  sea una suma y/o resta de las magnitudes, como por ejemplo

$$V(x, y, z) = x + y - z$$

Un estimado del error de  $V$  es

$$\Delta V = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

Para el caso que  $V(x,y,z,...)$  sea productos y/o cocientes de las magnitudes, dado por ejemplo por

$$V(x,y,z) = a \frac{x^n y^m}{z^l}$$

donde  $a$ ,  $n$ ,  $m$  y  $l$  son constantes sin error.

Un estimador del error de  $V$  es

$$\frac{\Delta V}{V} = n \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + m \left| \frac{\Delta y}{y} \right| + l \left| \frac{\Delta z}{z} \right|$$

En el caso que la dependencia de  $V$  sea más compleja (por ejemplo  $V(x) = \text{seno}(x)$ ) y no sea posible utilizar los estimadores anteriores, es aceptable utilizar como estimador del error de  $V$  a la media de los valores máximo y mínimos de  $V$ , dentro del intervalo definido por  $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$ . Es decir, si  $x'$  y  $x''$  pertenece a dicho intervalo y  $V(x')$  es el valor máximo de  $V$  ( $V_{max}$ ) para todos los valores de  $x$  en dicho intervalo y  $V(x'')$  es el valor mínimo de  $V$  ( $V_{min}$ ) para todos los valores de  $x$  en dicho intervalo, entonces

$$\Delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}$$

## Ejercicio

Realizar la propagación de errores para los siguientes casos,

a)  $V = x - y$

b)  $V = xy$

c)  $V = x/y$

d)  $V = ax^2$  con  $a = \text{constante}$

e)  $V = x y^2 + 1/z$

f)  $V = \text{seno}(x)$  con  $x = (0,12 \pm 0,01) \text{ rad}$

## Discrepancias

Si se realizan dos (o más) mediciones de una misma magnitud física utilizando dos (o más) métodos o fueron realizadas por dos (o más) observadores distintos, los resultados pueden no coincidir. En este caso existe una discrepancia y es necesario decidir si esta es significativa o no. Un criterio que se utiliza para comparar dos resultados independientes es, si dados los siguientes resultados,

$$x_1 = (\overline{x_1} \pm \Delta x_1)$$

$$x_2 = (\overline{x_2} \pm \Delta x_2)$$

Se define

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Los resultados son **indistinguibles** si,

$$|\overline{x_1} - \overline{x_2}| \leq \Delta x$$

### Ejercicios

Se quiere determinar el material del cual está hecho un cubo. Para ello se decidió determinar la densidad del cubo y, a partir de valores tabulados, determinar el material.

1. Se pesó el cubo en una balanza de 10g de apreciación. Indique la opción que informa correctamente el valor de la masa medida.

- ☐  $m = 100 \text{ g}$
- ☐  $m = (100 \pm 10) \text{ g}$
- ☐  $m = (100 \pm 10)$

2. Para determinar el volumen, se sumergió el cubo en agua y se midió el volumen de agua desplazada por el mismo. La medición se realizó en una probeta graduada con una apreciación de  $0.1 \text{ cm}^3$ . Indique la opción que informa correctamente el valor de volumen.

- ☐  $V = (12,7 \pm 0,1) \text{ cm}^3$
- ☐  $V = (12,70 \pm 0,02) \text{ cm}^3$
- ☐  $V = (12,7 \pm 0,1) \text{ cm}$



3. Para obtener una medición más precisa del volumen, se decidió medir la longitud de un lado del cubo utilizando un calibre de apreciación  $0,02\text{ mm}$  obteniéndose el siguiente valor  $l = (23,34 \pm 0,02)\text{ mm}$  (Recordar que el volumen de un cubo es  $V=l^3$ ). Indique la opción que informa el valor de volumen correctamente.
- ☐  $V = (12715 \pm 30)\text{ mm}^3$
- ☐  $V = (12720 \pm 30)\text{ mm}^3$
- ☐  $V = (12714,59 \pm 0,02)\text{ mm}^3$
4. Indique si los valores de volumen obtenidos por ambos métodos de medición son o no indistinguibles.
5. En orden de obtener una medición con un error menor se decidió realizar una mayor cantidad de mediciones de la longitud del cubo. Los valores obtenidos se muestran en la tabla 1.

N°	$l (\pm 0,02)\text{ mm}$	N°	$l (\pm 0,02)\text{ mm}$
1	23,32	6	23,34
2	23,35	7	23,36
3	23,34	8	23,32
4	23,33	9	23,33
5	23,34	10	23,34

Tabla 1. Mediciones de la longitud del cubo

En base a las mediciones realizadas, indique la opción que informa el valor más representativo de la longitud del cubo correctamente.

☐  $l = (23,34 \pm 0,02) \text{ mm}$

☐  $l = (23,34 \pm 0,01) \text{ mm}$

☐  $l = (123,337 \pm 0,02) \text{ mm}$

6. En base a las mediciones realizadas se obtuvo el valor de la densidad del cubo. Indique la opción que informa el valor de la densidad correctamente.

☐  $\rho = (7,9 \pm 0,8) \times 10^{-3} \text{ g mm}^{-3}$

☐  $\rho = (7,86 \pm 0,81) \times 10^{-3} \text{ g mm}^{-3}$

☐  $\rho = (7,9 \pm 0,8) \times 10^{-3} \text{ g mm}$

7. En una búsqueda bibliográfica se encontraron los siguientes valores tabulados de densidad para distintos materiales (Tabla 2).

Hierro	$7,87 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Cinc	$7,10 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Estañó	$7,29 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Tabla 2. Valores de densidad para distintos materiales.

Para este caso, se toma como error de los valores informados en la tabla 2 como la unidad en la última cifra indicada en el valor informado.

Por ejemplo, para el Hierro la densidad es  $(7,87 \pm 0,01) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .  
Indicar de que material está hecho el cubo, justificando si los valores son distinguibles o indistinguibles.



## Presentación de datos

Existen distintas maneras de presentar los valores de magnitudes medidas o determinadas de manera indirecta, siendo las más usuales las *tablas* y los *gráficos*.

### Tablas

Las tablas están formadas por celdas, donde se informa el valor, ordenadas en filas y columnas.

Generalmente las distintas mediciones de una misma magnitud física se ordenan en una columna siendo el número de columnas de la tabla proporcional a la cantidad de magnitudes informadas y el número de filas, proporcional al número de mediciones realizadas. En cada columna, la primera celda (encabezado) se utiliza para informar a que magnitud corresponden los valores de la columna con la unidad correspondiente. Para informar los errores aso-

ciados a la magnitud, se puede utilizar otra columna (con su correspondiente encabezado). En el caso que el error asociado a cada medición sea el mismo, el valor del error se puede informar en el encabezado de la correspondiente magnitud.

### Ejemplo

En la tabla 3 se muestran los valores medidos de la corriente ( $i$ ) que circula por una resistencia para distintos valores de voltaje ( $v$ ) aplicado a los bornes de la misma.

$i (\pm 1) mA$	$v(V)$	$\Delta v(V)$
10	1,0	0,1
21	2,1	0,1
29	2,9	0,2
40	4,0	0,2
51	5,1	0,1

Tabla 3. Mediciones de corriente y voltaje en una resistencia.

En la tabla 3 se observa que la primera celda de cada columna indica que magnitud se informa en dicha columna con su unidad correspondiente. Para el caso de corriente  $i$ , como todos los valores tienen el mismo error ( $1 mA$ ) se

optó por informar el error en el encabezado de la columna. En el caso del voltaje  $v$ , el error se informó en otra columna ( $\Delta v(V)$ ). En la columna se indica que el valor de corriente  $i = (10 \pm 1) mA$  se corresponde a un valor de voltaje  $v = (1,0 \pm 0,1)V$ .

### Ejercicio

1. En base a la tabla 3, indique el valor de voltaje  $v$  correspondiente a una corriente  $i = (40 \pm 1) mA$   
☐  $v = (4,0 \pm 0,1)V$ .  
☐  $v = (2,9 \pm 0,2)V$ .  
☐  $v = (4,1 \pm 0,2)V$ .
2. En base a la tabla 3, indique el valor de corriente  $i$  correspondiente a un voltaje  $v = (2,8 \pm 0,2) mA$   
☐  $i = (29 \pm 1) mA$ .  
☐  $v = (29 \pm 1)V$ .  
☐  $v = (29 \pm 0,2) mA$ .
3. Indique los seis (6) errores presentes en la siguiente tabla 4.

$l \text{ (cm)}$	$\Delta l \text{ (cm)}$	$m \pm 0,1$
120,3	0,1	50,0
111,6	0,2	41,23
105,9	0,15	36,1
95	0,1	25,3
90,1	0,1	20
84,7	0,2	15,0
0,80 m	0,2	10,0
76,0	0,1	6,1
71,8	0,1	2,0

Tabla 4.

## Gráfico

En general, los gráficos se utilizan para presentar los valores de dos magnitudes físicas relacionadas (par de valores) para estudiar la dependencia entre las mismas. Todo gráfico está formado por dos ejes perpendiculares (solo nos referiremos al caso de gráficos para dos magnitudes pero todo puede generalizarse para representar un número mayor de magnitudes) en los cuales se indica la magnitud que se representa con la unidad correspondiente. Cada eje tiene una escala adecuada que también debe ser indicada en el eje. La elección de la escala debe realizarse de acuerdo a los valores de la magnitud que



serán representados en la misma de manera tal que todos los valores puedan ser presentados y que el gráfico ocupe la mayor área posible de la hoja utilizada. Cada par de valores es representado con un punto ubicado en la posición correspondiente de acuerdo a las escalas elegidas. El error de cada magnitud se representa como un segmento centrado en el punto cuya longitud es igual a dos veces el error de dicho valor.

Para el caso de dos magnitudes medidas  $x$  e  $y$  con valores informados

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)[ux] \text{ e } y = (\bar{y} \pm \Delta y)[uy]$$

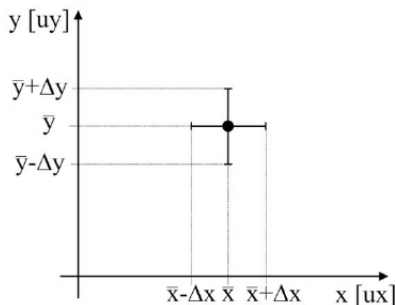


Figura 1. Representación de dos magnitudes medidas en un gráfico.

En caso que uno o ambos errores tengan un valor muy chico respecto a la escala y nos sea posible graficarlo/s, se acepta graficar un punto de mayor tamaño e indicar que el tamaño del punto contiene el/los error/es.

### Ejemplo

La figura 2 muestra el gráfico correspondiente al ejemplo presentado en la sección anterior (Tabla 3) de mediciones de corriente y voltaje.

### Ejercicio

Realice el gráfico correspondiente a la Tabla 4 con las correcciones correspondientes.

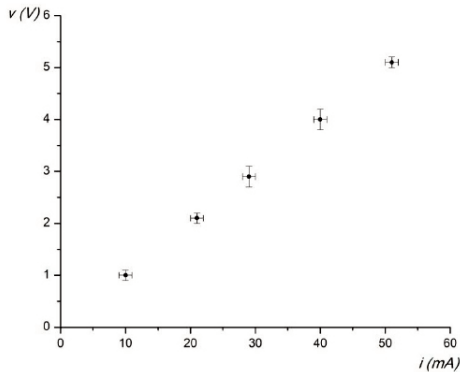


Figura 2. Gráfico de corriente ( $i$ ) y de voltaje ( $v$ ) medidos.

## Relación entre magnitudes físicas

### Relaciones lineales y no lineales

### Ajustes. Determinación de parámetros a partir de un gráfico

Dos magnitudes físicas ( $x$  e  $y$ ) están relacionadas si  $y = f(x)$  donde  $f$  es una función que puede ser muy compleja. Sin embargo, existen casos donde las magnitudes presentan una dependencia lineal, es decir

$$y = mx + b$$

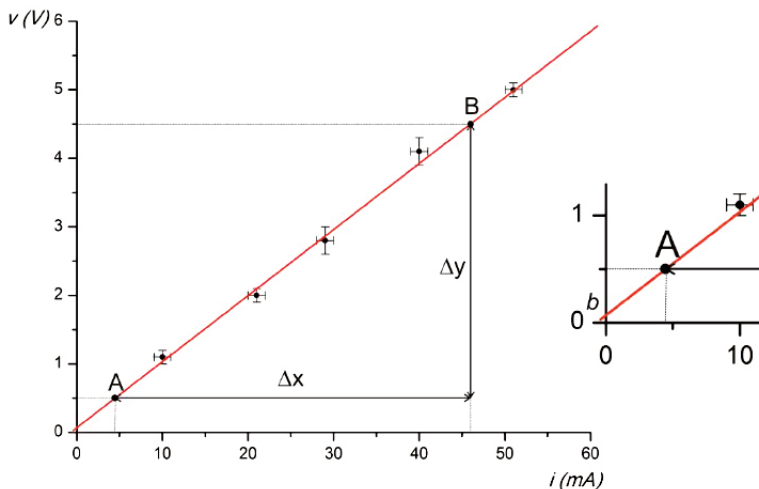
con  $m$  (pendiente) y  $b$  (ordenada al origen) constantes.

Ejemplos de esto son la Ley de Ohm ( $V = Ri$ ), la fuerza realizada por un resorte ( $F = k(l - l_0)$ ) y la relación masa-volumen de un cuerpo ( $m = \rho V$ ).

A partir de mediciones de  $x$  e  $y$  es posible determinar los valores de  $m$  y de  $b$  de un gráfico (si bien existen métodos numéricos para determinar estos valo-

res, ellos escapan al apunte).

En un gráfico  $y$  vs  $x$  se traza la recta que mejor ajusta a todos los puntos, esto es la recta que mejor se aproxima a **todos** los puntos, y a partir de la recta se determinan los valores más representativos de  $m$  y de  $b$ .



Para determinar el valor de  $m$  se eligen dos puntos de la recta de ajuste (A y B) y se determina la pendiente de la misma mediante,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x_A - x_B|}{|y_A - y_B|}$$

El valor de  $b$  se determina del corte de la recta de ajuste con el eje vertical del gráfico.

Para determinar los errores de  $m$  y de  $b$  se deben trazar dos rectas más que sean buenos ajustes de los puntos, donde los valores de la pendiente y de la ordenada al origen obtenidos serán valores máximos ( $m_{max}$ ;  $b_{max}$ ) y mínimos ( $m_{min}$ ;  $b_{min}$ ) asociados a  $m$  y  $b$ . Luego, una estimación de los errores se obtienen como la media,

$$\Delta b = \frac{(b_{max} - b_{min})}{2}$$

$$\Delta m = \frac{(m_{max} - m_{min})}{2}$$

Existen casos donde no hay una relación lineal entre las magnitudes pero que es posible, eligiendo adecuadamente las variables, obtener un gráfico lineal. Por ejemplo, el período de oscilación ( $T$ ) de un péndulo matemático está rela-

cionado con la longitud ( $l$ ) por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

que no es lineal. Pero si se realiza el gráfico  $T^2$  vs  $l$ , se obtiene una dependencia lineal entre estas dos variables,

$$T^2 = \frac{2\pi}{g} l$$

que se puede ajustar como fue indicado anteriormente.

### Ejercicio

Elija las variables apropiadas para obtener una relación lineal.

a)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  (Oscilación resorte).

b)  $i = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  con  $i_0$  y  $\tau$  constantes (Carga capacitor).

## BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

- A. Maiztegui, R. Gleiser, *Introducción a las mediciones de laboratorio*. Editorial Kapeluz, 1980.
- S. Pérez, C. Schürer, G. Stutz. *Trabajos de Física. Análisis de Datos e Incertidumbres en Física Experimental*. FaMAF, 2011.

La Olimpíada Argentina de Física (OAF) promueve la participación de docentes y estudiantes en una actividad científica extraescolar, que si bien tiene aspectos competitivos, no persigue como fin la competencia. Se entiende que la OAF es una tarea extraescolar en el sentido de que se propone desde afuera de la escuela, pero su preparación y desarrollo debe servir como un elemento más en las actividades en el aula de Física.

Una característica principal de la Olimpíada de Física es su descentralización: en distintas regiones del país, escuelas y docentes participan en la organización con total independencia y sin competir entre las regiones, cada una dentro de sus posibilidades y en su propio nivel. Se parte desde cada establecimiento educativo individualmente (directivos, profesores, alumnos), para luego compartir experiencias con otros colegios en competencias más abarcativas, hasta llegar a la instancia nacional.

Otra característica muy importante, es la naturaleza misma de la Física que hace imprescindible que las pruebas tengan una parte de lápiz y papel y también una parte experimental, en la que el proceso de medición es central.



OAF

Olimpíada Argentina de Física  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba  
Medina Allende s/n - Ciudad Universitaria - 5000 - Córdoba - Argentina  
Tel.: 0351-5353701 (int. 41361) - Correo electrónico: [oaf@famaf.unc.edu.ar](mailto:oaf@famaf.unc.edu.ar)