Olimpíada Argentina de Física

Instancia Nacional 2020

Prueba Experimental - ÚNICO NIVEL

Reglas a tener en cuenta

Antes de comenzar la prueba:

- No consigne **en ningún sitio de la prueba su nombre, apellido o DNI, de hacerlo: será causal de descalificación.**
- Lea cuidadosamente **TODO** el enunciado de la prueba.

Durante la prueba:

- Sólo puede utilizar las hojas y los útiles de escritura provistos, una regla y una calculadora científica no programable. **Escriba únicamente con lapicera,** resaltados o uso de otros colores serán plausibles de descalificación.
- Cualquier **duda o consulta** que quiera realizar la debe hacer **únicamente por escrito al Profesor, en privado, al chat del Aula de la prueba**.
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. **No enumere las hojas del enunciado y no escriba respuestas en ellas pues no serán consideradas.**
- **Escriba de un solo lado de las hojas.**

Al finalizar la prueba:

- Escanee o fotografíe cuidadosa y **únicamente las hojas con sus respuestas** (descarte el enunciado). **Siempre debe estar primero la hoja de respuestas provista.**
- Con las imágenes genere un archivo .pdf. **Nombre el archivo .pdf con su nombre y apellido.**
- Verifique que el archivo .pdf se ve correctamente y que las páginas están en el orden correcto. Entregue el mismo en el Classroom de la Prueba.
- **Cuide el Equipo Experimental**, deberá **entregarlo en la escuela** para formar parte del laboratorio de Física**.**

Determinación del índice de refracción de un material

Introducción

Se denomina índice de refracción de un medio (n) al cociente entre la velocidad de la luz en el vacío (c) y la velocidad de la luz en dicho medio (v)

$$n = \frac{c}{v} \tag{1}$$

Es decir, el índice de refracción de un medio es un coeficiente que indica cuánto se reduce la velocidad de la luz dentro del mismo.

Si la luz incide de manera oblicua a la superficie que separa dos medios, con índices de refracción distintos, experimenta un cambio en la dirección de propagación (refracción), tal como se esquematiza en la figura 1. Este cambio en la dirección se debe al cambio de velocidad de propagación de la onda, cuando pasa de un medio a otro. La relación entre el cambio de dirección (ángulo) y los índices de refracción de los medios se denomina Ley de Snell. Esta ley estipula que:

$$n_1 \,\mathrm{seno}\, \theta_1 = n_2 \,\mathrm{seno}\, \theta_2 \tag{2}$$

Donde los ángulos θ_1 y θ_2 se miden respecto a la normal de la superficie como se muestra en la figura 1.

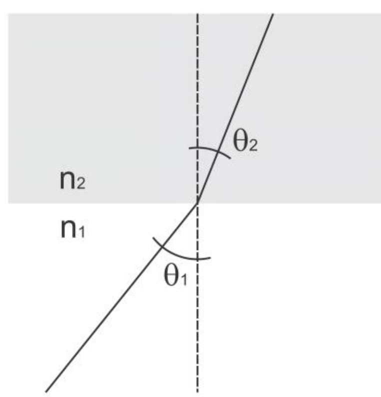


Figura 1. Cambio de dirección de un haz de luz cuando atraviesa una superficie plana que separa dos medios con índices de refracción n_1 y $n_2 > n_1$.

Objetivo: Determinar el índice de refracción del acrílico.

Materiales provistos:

- Prisma recto de sección rectangular de acrílico transparente y con dos caras paralelas pulidas con dimensiones $30{,}0\ mm\ x\ 30{,}0\ mm\ x\ 40{,}0\ mm$. La incertidumbre en las dimensiones es de $0{,}1\ mm$.
- 20 Alfileres.
- Plancha de Telgopor de aproximadamente $15\ mm\ x\ 190\ mm\ x\ 290\ mm$
- Hojas milimetradas o cuadriculadas
- Hojas A4 blancas
- Transportador

Materiales que Usted debe proveer

- Regla milimetrada

Armado del dispositivo y procedimiento experimental

1. Sobre la plancha de Telgopor, coloque una hoja blanca y sujétela al Telgopor por medio de alfileres. En el centro de la hoja, ubique el prisma de acrílico sobre una de sus caras de $30\ mm\ x\ 40\ mm$. Para las mediciones con un ángulo de incidencia $\theta_i \leq 45$ coloque el prisma de manera que su dimensión mayor esté paralela a la dimensión menor de la hoja como se muestra en la figura 2 (izquierda). Para ángulos de incidencia mayores ($\theta_i > 45°$) coloque el prisma de manera que su dimensión mayor esté paralela a la dimensión mayor de la hoja como se muestra en la figura 2 (derecha). Marque con una lapicera el contorno del prisma teniendo cuidado de no moverlo y no romper la hoja.

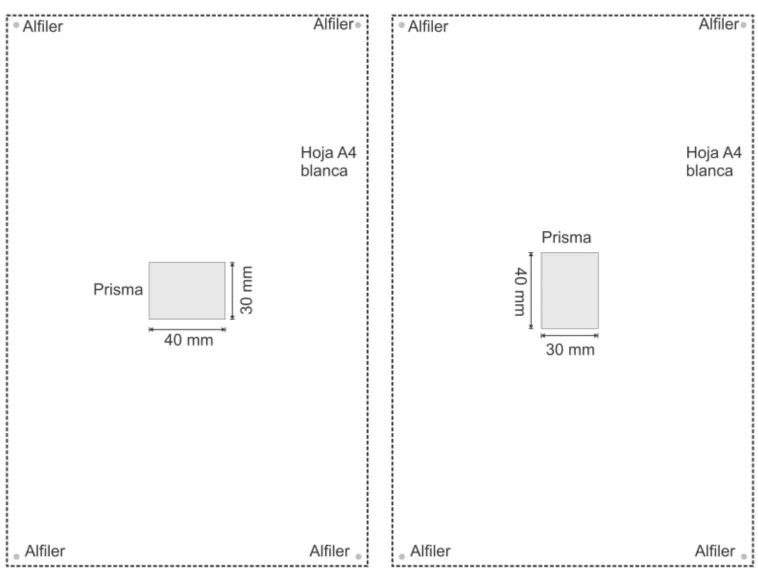


Figura 2. Disposición del prisma sobre la hoja A4 blanca para un ángulo de incidencia $\theta_i \leq 45°$ (izquierda) y para $\theta_i > 45°$ (derecha).

2. Coloque al menos tres alfileres en línea de manera tal que la recta que forma la unión imaginaria de éstos forme un ángulo $\theta_i > 0$ con la dirección normal a la cara del prisma, como se muestra en la figura 3. Procure que la separación de los alfileres más alejados sea de al menos $10\ cm$ y que los mismos estén verticales. **Esta línea imaginaria actuará como haz de luz incidente para observar la refracción**.

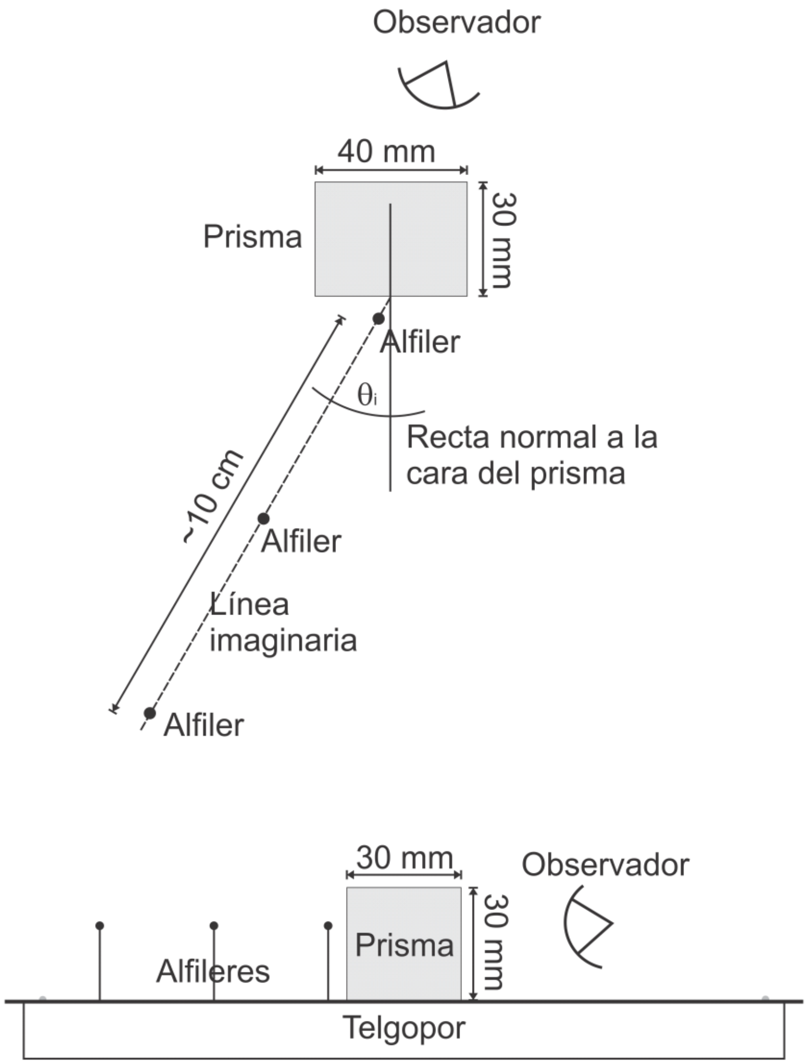


Figura 3. Vista superior y lateral de la ubicación de los alfileres que forman el haz de luz incidente.

3. Observe por la cara opuesta del prisma (y a través del mismo) como se muestra en la figura 3 (preste atención a la forma en que deben colocarse para la observación). Coloque al menos otros tres alfileres de manera que estén en línea con los alfileres colocados en el paso anterior cuando se los mira a través del prisma, como se muestra en la figura 4. Procure que la separación de los alfileres de los extremos sea de al menos $10\ cm$ y que los mismos estén verticales. **Esta línea imaginaria actuará como haz de luz refractado luego de atravesar el prisma**.

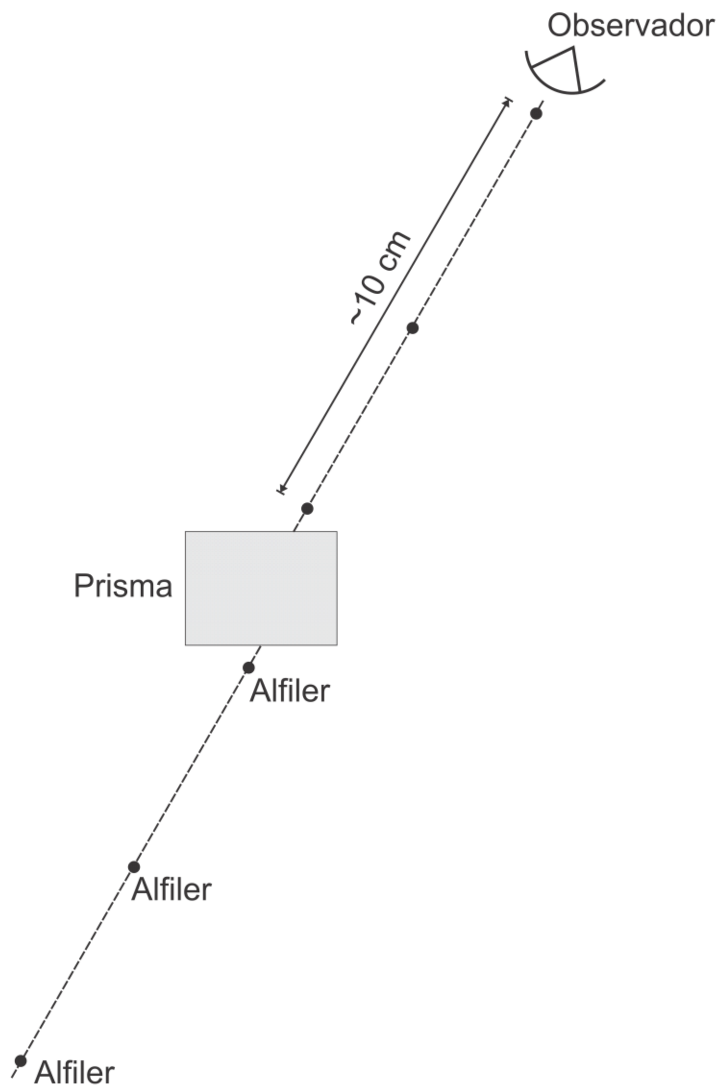


Figura 4. Ubicación de los alfileres que forma el haz de luz incidente y refractado luego de atravesar el prisma.

4. Retire el prisma y trace las líneas de los haces de luz incidente y refractado determinados con los alfileres y el haz de luz dentro del prisma como se muestra en la Figura 5.

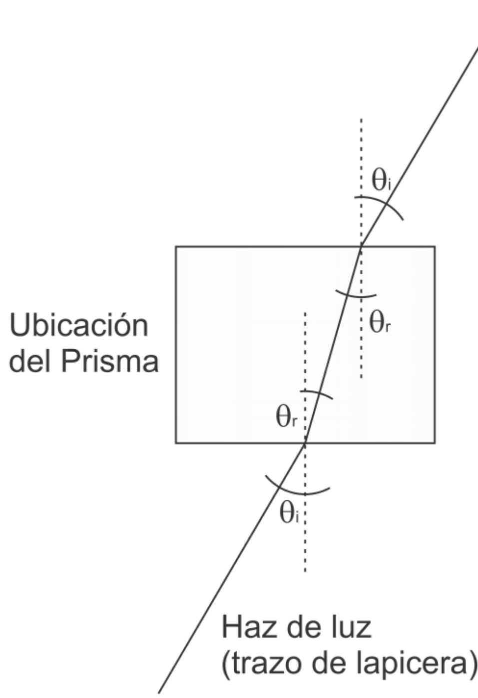


Figura 5. Haces de luz incidente, refractado y dentro del prisma.

5. Determine el ángulo de incidencia θ_i y el ángulo refractado θ_r con sus respectivas incertidumbres y repórtelo en una tabla (Tabla I).

6. Repita el procedimiento para distintos ángulos de incidencias.

Nota: Para una mayor claridad, cambie la hoja A4 blanca luego de dos mediciones.

Análisis de datos

a. Reporte los ángulos de incidencia θ_i y refractados θ_r medidos en la Tabla I.

b. Determine $y = \sin\theta_i$ y $x = \sin\theta_r$ con sus respectivas incertidumbres y repórtelo en la Tabla I.

c. Grafique los valores de x e y calculados y realice un ajuste lineal de los mismos. Reporte el valor de la pendiente (m) de la recta ajustada.

d. A partir del ajuste, determine el índice de refracción del acrílico n_{ac} sabiendo que el índice de refracción del aire es $n_a = (1{,}0003 \pm 0{,}0001)$. Reporte el valor obtenido.

Nota: La incertidumbre Δf de $f(t) = \operatorname{sen} t$ para $t_0 = (\overline{t_0} \pm \Delta t_0)$ se puede determinar como

$$\Delta f = \cos(\overline{t_0})\,\Delta t_0$$

Hoja de Respuestas

Inciso		Puntaje
a.	Tabla I	
b.	Tabla I	
c.	Gráfico $m =$	
d.	$n_{ac} =$	

Solución Experimental 2020

Inciso		Puntaje N1	Puntaje N2
a.	Tabla I	**10 ptos**: 2 ptos por medición del par (θ_i, θ_r) con su correspondiente incertidumbre (satura en 5 mediciones)	**10 ptos:** 1 pto por medición del par (θ_i, θ_r) con su correspondiente incertidumbre (satura en 10 mediciones)
b.	Tabla I	**2 ptos**	**2 ptos**
c.	Gráfico en figura 1. $m = (1{,}50 \pm 0{,}07)$	**7 ptos**: 4 ptos por el gráfico donde se tiene en cuenta los ejes, el uso de la hoja y la incertidumbre de los puntos graficados. 2 ptos por el ajuste 1 pto por el valor de m con su incertidumbre.	**7 ptos**: 4 ptos por el gráfico donde se tiene en cuenta los ejes, el uso de la hoja y la incertidumbre de los puntos graficados. 2 ptos por el ajuste 1 pto por el valor de m con su incertidumbre.
d.	$n_{ac} = (1{,}50 \pm 0{,}07)$	**1 pto**	**1 pto**

Tabla I

$\theta_i \ \pm 2°$	$\theta_r \ \pm 2°$	$x = \sin\theta_r$	Δx	$y = \sin\theta_i$	Δy
10	7	0,12	0,04	0,17	0,04
15	10	0,17	0,04	0,26	0,03
20	15	0,26	0,03	0,34	0,03
25	16	0,28	0,03	0,42	0,03
30	21	0,36	0,03	0,50	0,03
35	21	0,36	0,03	0,57	0,03
40	25	0,42	0,03	0,64	0,03
45	29	0,49	0,03	0,71	0,03
50	31	0,52	0,03	0,77	0,02
55	29	0,49	0,03	0,82	0,02
60	33	0,55	0,03	0,87	0,02
65	38	0,62	0,03	0,91	0,01
70	38	0,62	0,03	0,94	0,01

Nota: La incertidumbre para los ángulos se tomó como 2° dado el trazo de la lapicera, la posición de los alfileres y para tener en cuenta errores en la posición del prisma y la perpendicularidad de las rectas.

$$\Delta x = \cos(\theta_r)\,\Delta\theta_r$$

$$\Delta y = \cos(\theta_i)\,\Delta\theta_i$$

Con $\Delta\theta_r$ y $\Delta\theta_i$ expresado en radianes, $\Delta\theta_r = \Delta\theta_r = 0{,}04\ rad$.

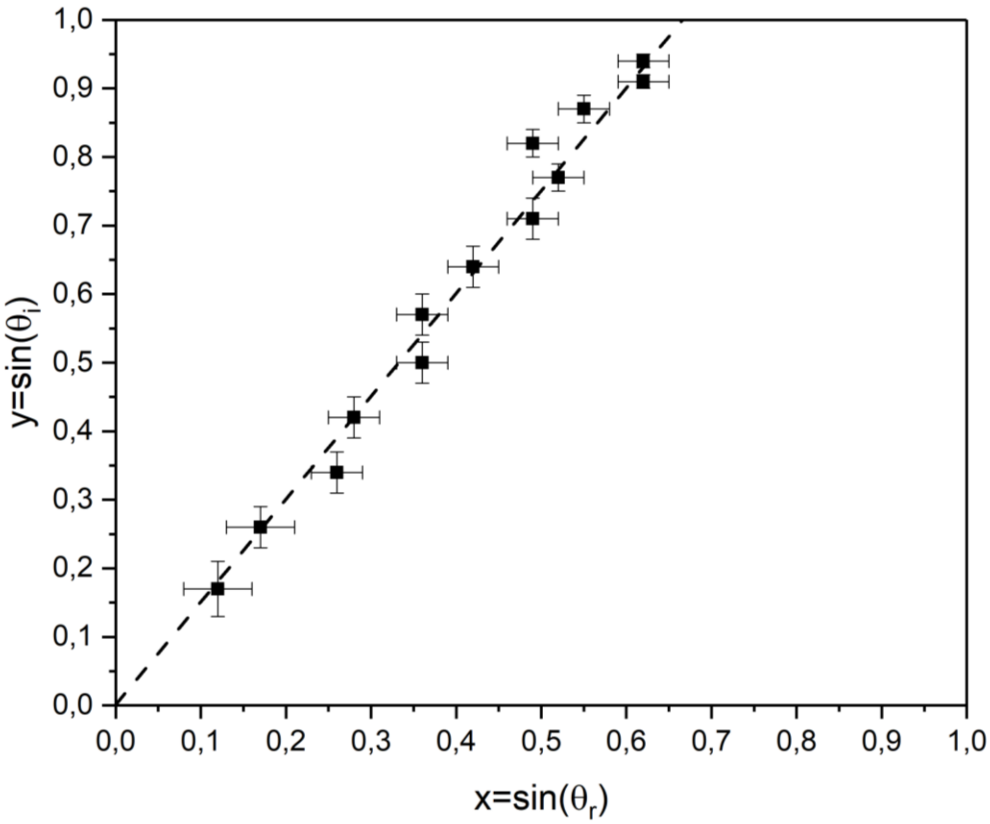


Figura 1.

Del ajuste se obtiene la pendiente m y la ordenada al origen o

$$m = (1{,}50 \pm 0{,}07)$$

$$o = (0{,}001 \pm 0{,}04)$$

La ordenada al origen es indistinguible con cero.

La pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{n_{ac}}{n_a}$$

$$n_{ac} = m\, n_a = (1{,}50 \pm 0{,}07)$$

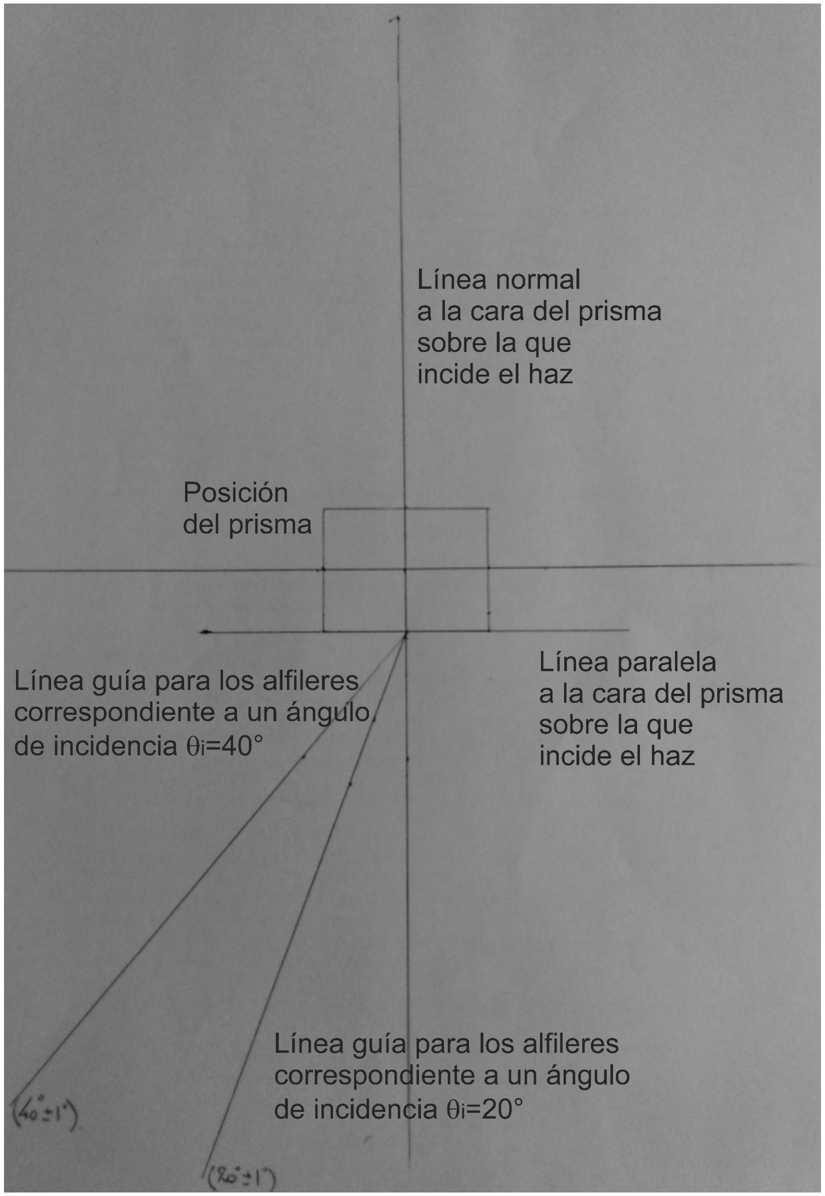
La incertidumbre se determinó como

$$\frac{\Delta n_{ac}}{n_{ac}} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta n_a}{n_a}$$

Se muestra la hoja sobre la cual se ha dibujado el contorno del prisma (centrado sobre la hoja) junto con dos líneas perpendiculares que pasan por el centro de la hoja.

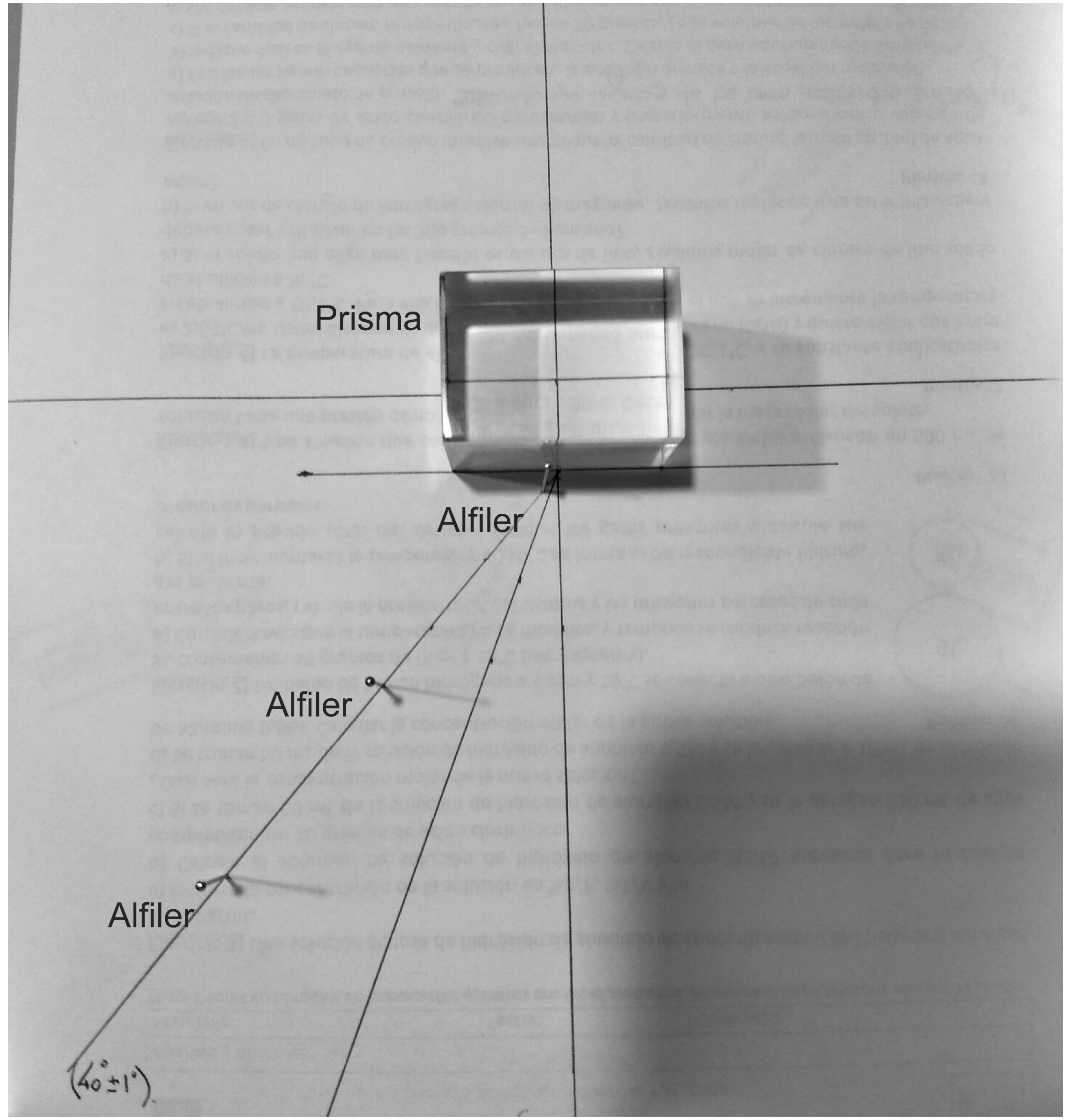
Además, se ha marcado una línea paralela y sobre la cara del prisma sobre la cual incidirá el haz. La línea vertical que pasa por el centro de la hoja es una recta normal a la cara del prisma sobre la que incidirá el haz.

Las líneas oblicuas representan dos haces que inciden sobre el prisma con un ángulo de 20° y 40° respecto a la normal a la cara del prisma. Estas líneas se usarán para colocar las alfileres que forman el haz incidente.

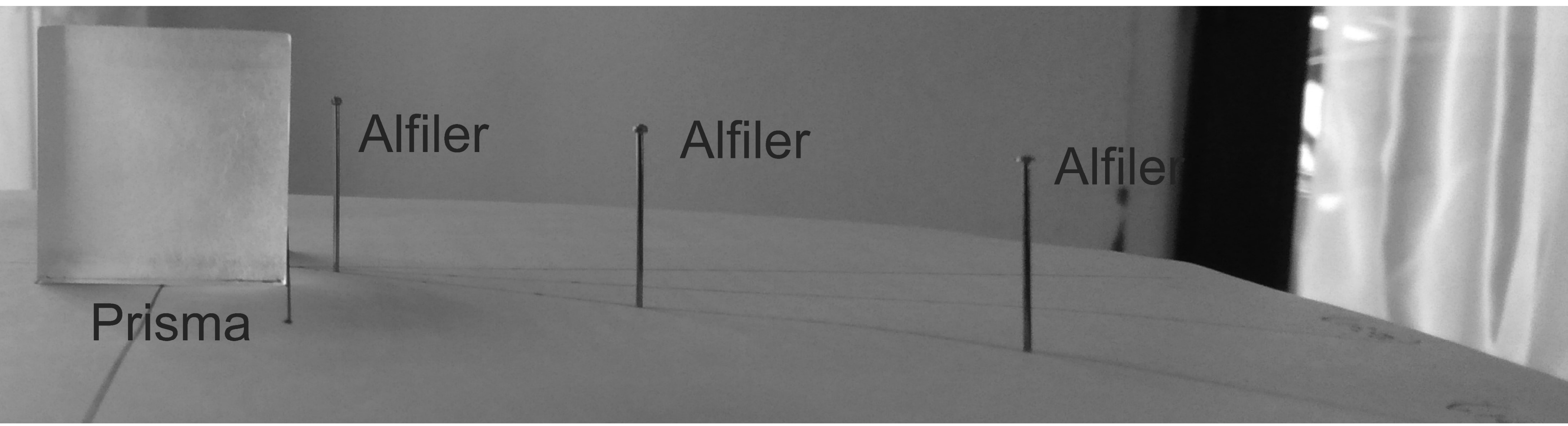


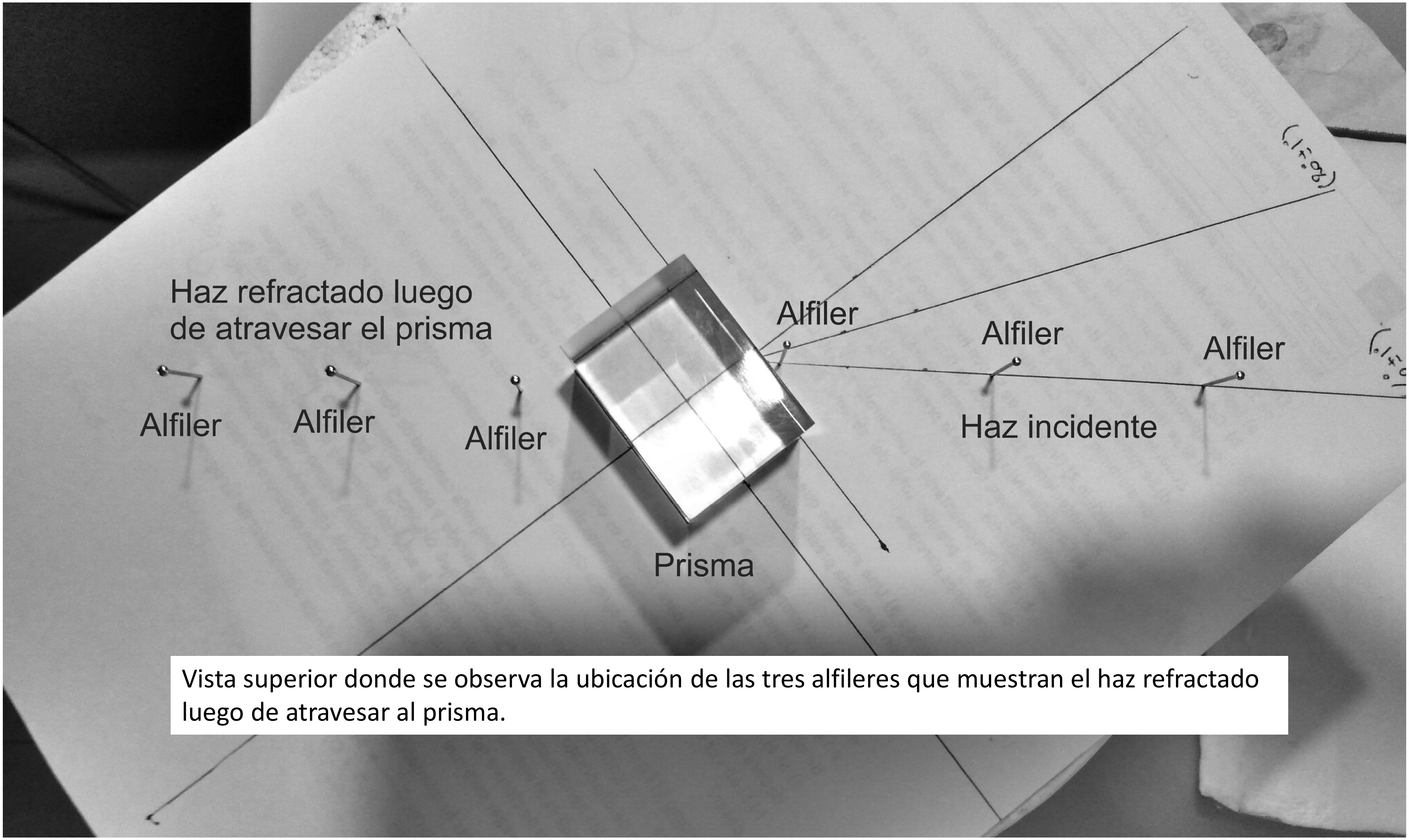
Vista superior de la hoja con el prisma ubicado en su posición.

Se han colocado tres alfileres sobre la línea que forma un ángulo de 40° respecto a la normal a la cara del prisma, formando el haz de luz incidente.



Vista lateral donde se muestra al prisma y las tres alfileres que forman el haz incidente.

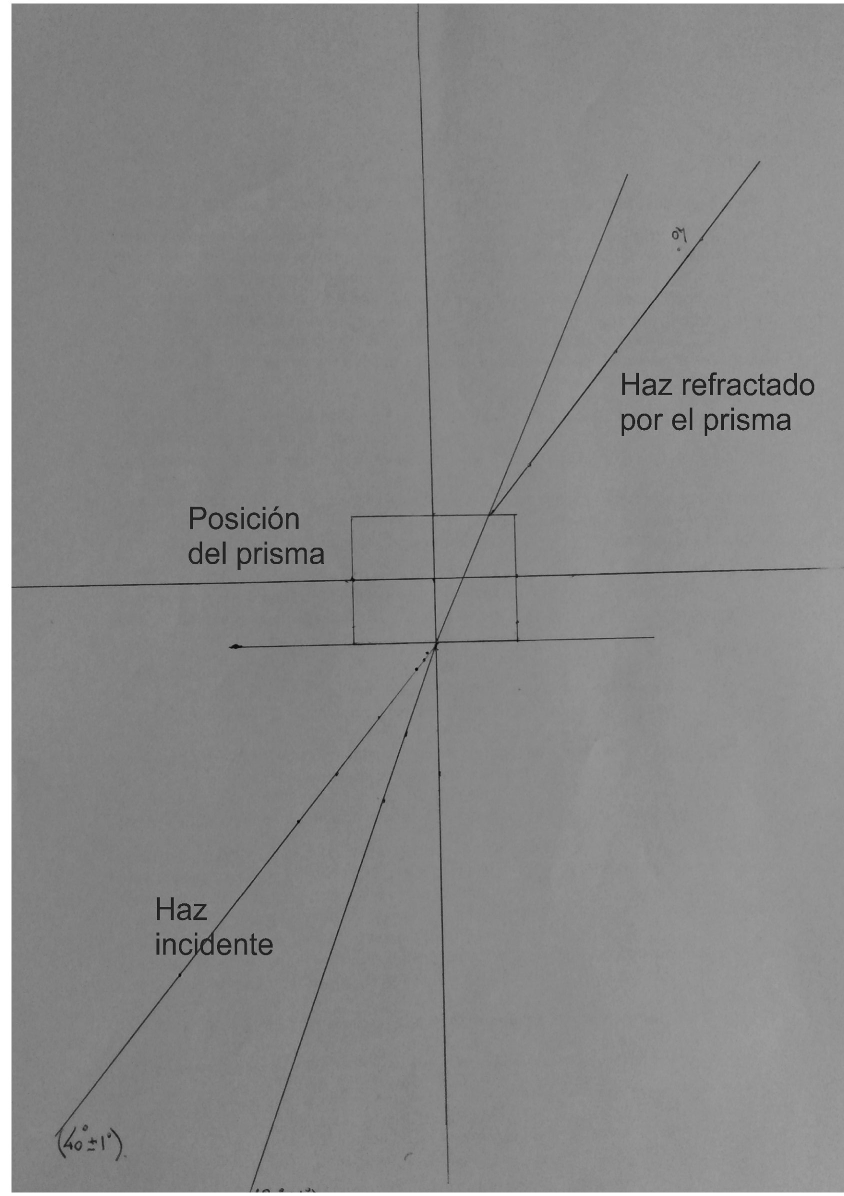




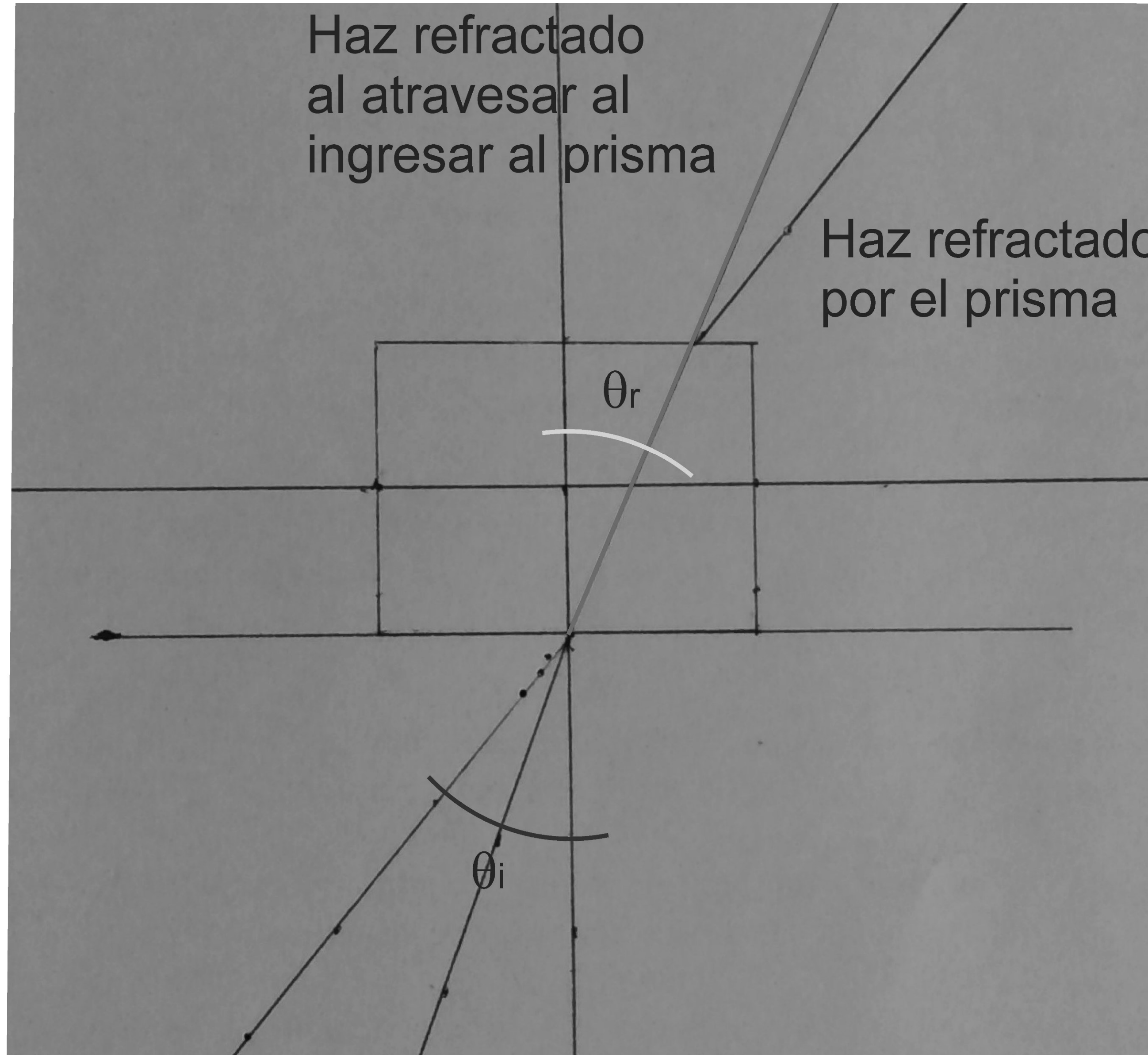
Vista superior donde se observa la ubicación de las tres alfileres que muestran el haz refractado luego de atravesar al prisma.

Vista lateral donde se observa
la posición de los alfileres que
representan el haz de luz incidente
Y el refractado por el prisma.

Hoja con la recta del haz refractado por el prisma determinada con los alfileres (Haz refractado por el prisma). Esta recta se extendió hasta la cara del prisma correspondiente al observador.



Se muestra la recta que representa al trayecto del haz dentro del prisma junto con los ángulos incidentes y refractados que se deben medir.



Olimpíada Argentina de Física

Instancia Nacional 2020

Prueba Teórica - PRESTE ATENCIÓN AL NIVEL ELEGIDO

Reglas a tener en cuenta

<u>**Antes de comenzar la prueba**</u>**:**

- No consigne **en ningún sitio de la prueba su nombre, apellido o DNI, de hacerlo: será causal de descalificación.**
- Lea cuidadosamente **TODO** el enunciado de la prueba.

<u>**Durante la prueba**</u>**:**

- Sólo puede utilizar las hojas y los útiles de escritura provistos, una regla y una calculadora científica no programable. **Escriba únicamente con lapicera,** resaltados o uso de otros colores serán plausibles de descalificación.
- Cualquier **duda o consulta** que quiera realizar la debe hacer **únicamente por escrito al Profesor, en privado, al chat del Aula de la prueba**.
- La solución de <u>cada problema</u> teórico debe comenzar en una <u>nueva hoja</u>.
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas <u>**por problema**</u>. **No enumere las hojas del enunciado y no escriba respuestas en ellas pues no serán consideradas.**
- **Escriba de un solo lado de las hojas.**

<u>**Al finalizar la prueba:**</u>

- Escanee o fotografíe cuidadosa y **únicamente las hojas con sus respuestas** (descarte el enunciado). **Antes de la solución a cada problema siempre debe estar la correspondiente hoja de respuestas provista.**
- Con las imágenes de cada problema genere tres archivos .pdf. **Nombre cada archivo .pdf con el número de problema correspondiente, su nombre y apellido.**
- Verifique que los archivos .pdf se ven correctamente y que las páginas están en el orden correcto. Entregue los mismos en el Classroom de la Prueba.

Problema 1: ¡¡¡Una Aventura Espacial en el Renacimiento!!!

Una de las ***potencias mundiales*** de comienzos del siglo XVII contrató a un científico de la época para que realice los cálculos necesarios para poner un objeto en órbita alrededor de la Tierra. El conocimiento de la época se limitaba a las ***Leyes de Kepler*** y a algunas cuestiones de ***cinemática*** y muy poco de dinámica. Se disponía también de datos sobre ***los parámetros de la órbita lunar*** y estaba en ciernes el uso del telescopio recientemente desarrollado por Galileo.

Las ***Leyes de Kepler***, enunciadas para el movimiento planetario, son:

1) Los planetas se mueven sobre elipses con el Sol en uno de sus focos.

2) El radio vector que describe el movimiento del planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales.

3) Si T_1, T_2, a_1 y a_2 representan los periodos y los semiejes mayores de las órbitas de dos planetas, 1 y 2, se cumple la siguiente relación:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Puede resultar extraño pensar en este tipo de planteos, pero se conoce que fue el propio Kepler quien, en una novela llamada Somnium, especuló sobre la posibilidad de poner humanos en viaje hacia la Luna.

La tarea del científico contratado era determinar las características de la órbita que el objeto seguiría, como así también pensar el modo en que ese objeto podía ponerse en órbita.

Considerando los datos con los que contaba el científico:

Tabla1: Datos con los que contaba el científico

Radio medio de la órbita lunar	384000 km
Período de la órbita lunar	27,32 días
Radio promedio de la Tierra	6371 km

Sabiendo que entre las condiciones que el ***cuerpo*** puesto en órbita debía cumplir, estaba el hecho que *debía permanecer quieto sobre el cielo de la potencia que había contratado al científico*; ***en la terminología moderna se diría que era un objeto geo sincrónico.***

a) Calcule el semieje mayor de la elipse sobre la que se mueve el cuerpo.

Otro requerimiento que se le solicitó al científico renacentista para el diseño de la órbita, era que la excentricidad de la misma fuese $e = 0{,}30$. Recordar que ***la excentricidad de una elipse está definida por***:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

donde a es el semieje mayor y b el semieje menor de la elipse.

b) Calcule el semieje menor de la elipse sobre la que se mueve el cuerpo.

Teniendo en cuenta que ***la ecuación para una elipse,*** en coordenadas polares, está dada por:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta)}$$

donde θ es el ángulo que se mide desde el perigeo, en el sentido antihorario y tal que el origen de *r* está en el foco de la elipse (ver Figura 1). Y que ***el área A de la misma está dada por***: $A = \pi\, a\, b$.

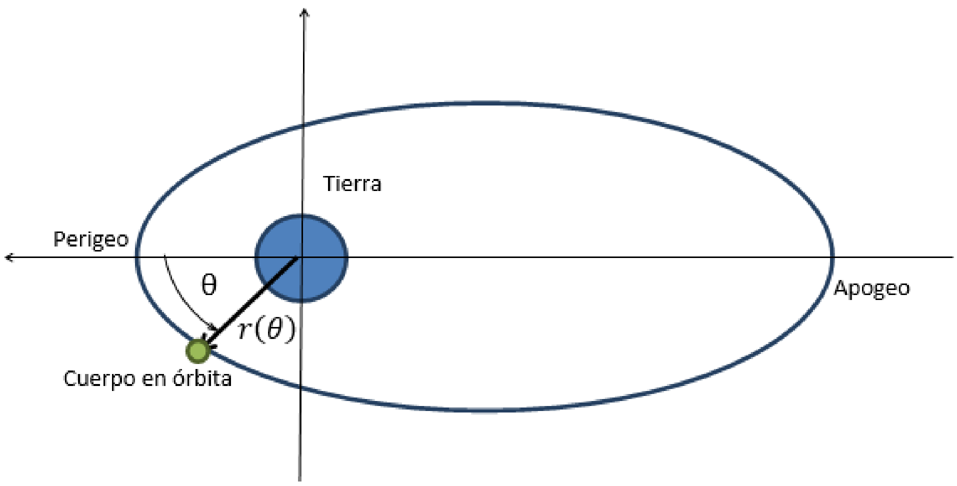


Figura 1: Elipse que representa la trayectoria del cuerpo puesto en órbita alrededor de la Tierra (dibujo no a escala)

c) Calcule la velocidad areolar media del cuerpo al recorrer su órbita.

d) Calcule la velocidad media del cuerpo en las cercanías del perigeo de la órbita.

e) Calcule la velocidad media del cuerpo en el punto más lejano (apogeo) de su trayectoria.

Fin Prueba Nivel 1

Continúa Prueba para Nivel 2

Algunos preparativos más…

Entre las tareas del científico renacentista estaba determinar la posición del cuerpo en su órbita en función del tiempo. Para conseguirlo calculó el área de los sectores delimitados por la posición del radio vector *r* en el perihelio, r_p, y el radio vector $r(\theta_j)$, donde

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{10}, \quad j = 0, \ldots, 10$$

y corresponden a haber dividido el intervalo $[0,2\pi]$ en 10 partes iguales (ver Figura 2).

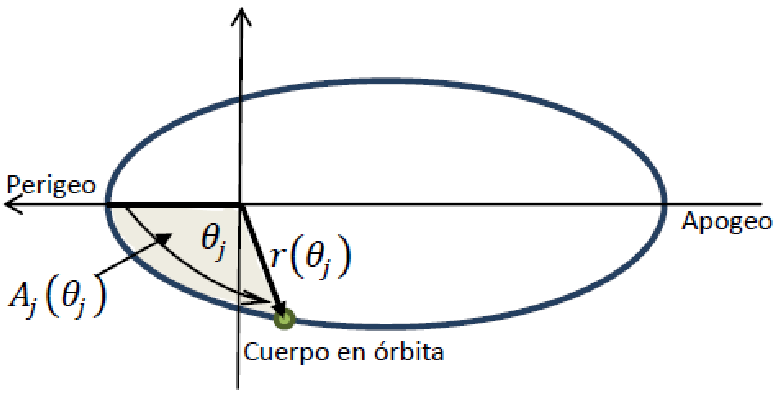


Figura 2: Sector de área barrido por el vector posición

El área A_j correspondiente al sector con ángulo θ_j, está dada por la expresión:

$$A_j(a, e, \theta_j) = \frac{a^2(1-e^2)^2}{2} I(e, \theta_j)$$

donde a es el semieje mayor de la elipse, e su excentricidad. Las cantidades $I(e,\theta_j)$ están dadas en la Tabla 2, para la excentricidad $e = 0{,}3$.

Tabla 2: Valores de las cantidades *I(e,θj)* para *e=0.3*	
$I(0.3,\theta_j)$	θ_j
0.00	0.00
0.383	0.63
0.842	1.26
1.475	1.88
2.403	2.51
3.619	3.14
4.835	3.77
5.763	4.40
6.396	5.03
6.855	5.65
7.238	6.28

f) ***A partir de los datos de la Tabla 1, y usando las leyes de Kepler, confeccione una tabla para el módulo del vector posición del cuerpo puesto en órbita como función del tiempo. Con los datos provistos podrá evaluar el vector posición en 11 tiempos diferentes.***

¡¡¡Al infinito y más allá!!!

Isaac Newton discutió el uso de un cañón para colocar un objeto en órbita. Newton hizo el siguiente razonamiento **(en sus propias palabras):** *imaginemos una montaña muy alta que su pico esté por encima de la atmósfera de la Tierra; sobre la cima de esa montaña hay un cañón que dispara horizontalmente. A medida que cada disparo se hace con una mayor carga explosiva, la bala de cañón tendrá una mayor velocidad, y el proyectil caerá cada vez más lejos. Finalmente, a cierta velocidad el proyectil no tocará la tierra y quedará orbitando por siempre alrededor de la Tierra.*

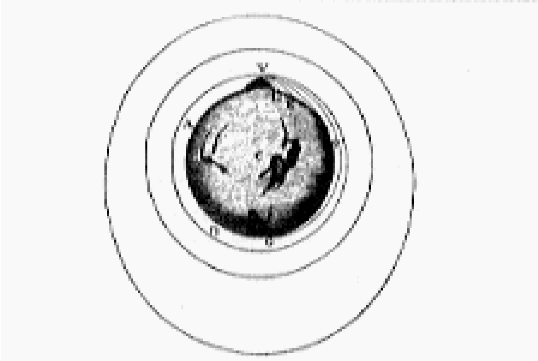


Illustration from Isaac Newton, *Principia, VII, Book III, p551.*

Por prueba y error y procediendo de acuerdo a lo sugerido por Newton, el científico renacentista se dispone a lanzar el proyectil, en dirección horizontal, a distintas velocidades. El objeto que deseaba poner en órbita tenía una masa de 200 kg y la masa del cañón del que disponía era de 2000 kg.

g) ***Diseñe un método para medir la velocidad de salida del proyectil utilizando mediciones de la velocidad de "retroceso" de cañón.***

Hoja de Respuestas Problema 1

¡¡¡Una Aventura Espacial en el Renacimiento!!!

		Pts
a)	el semieje mayor de la elipse es:	
b)	el semieje menor de la elipse es:	
c)	la velocidad areolar media es:	
d)	la velocidad media del cuerpo en las cercanías del perigeo es:	
e)	la velocidad media del cuerpo en el apogeo es:	
	Fin Nivel 1, continúa Nivel 2	
f)	Tabla para: **módulo del vector posición** como función del **tiempo**:	
g)	método para medir la velocidad de salida:	

Hoja de Respuestas Problema Nº2 :

Una Aventura Espacial en el Renacimiento!!!

		Pts
a)	el semieje mayor de la elipse es: $$a_1 = 442333\ km$$	
b)	el semieje menor de la elipse es: $$b = 40383\ km$$	
c)	la velocidad areolar media es: $$vel_{areolar} = \frac{\acute{a}rea\ de\ la\ elipse}{per\acute{\imath}odo\ de\ la\ \acute{o}rbita} = \frac{\pi ab}{T}$$	
d)	la velocidad media del cuerpo en las cercanías del perigeo es: $$V_p = 15103\ \frac{km}{h}$$	
e)	la velocidad media del cuerpo en el apogeo es: $$v_a = \frac{2\pi b}{T(1+e)} = 8132\ \frac{km}{h}$$	

Fin Nivel 1, continúa Nivel 2

continúa Nivel 2

f) Tabla para: **módulo del vector posición** como función del **tiempo**:

$t_j\ (h)$	$r_j\ (km)$
0.00	29633
1.27	31007
2.79	35286
4.89	42393
7.97	50830
12.00	55033
16.03	50868
19.11	42435
21.21	35223
22.73	31021
24.00	29633

g) método para medir la velocidad de salida:

En cada disparo el cañón se desplazará en sentido contrario al proyectil y su velocidad tras el disparo será:

$$v_{ca\tilde{n}on} = -\frac{m_{cuerpo}}{m_{ca\tilde{n}\acute{o}n}} v_{cuerpo}$$

La velocidad promedio del cañón tras el disparo es:

$$v_{ca\tilde{n}on} = \frac{d}{t}$$

donde d es la distancia que recorre en determinado tiempo t. Si fijamos la distancia, y logramos medir el tiempo, podemos sacar la velocidad media del cañón en el retroceso y usando la ecuación de arriba, sacar la velocidad con que se lanzó el cuerpo al espacio.

Solución Problema "Una Aventura Espacial en el Renacimiento"

a) De acuerdo a la Tercera Ley de Kepler, si

T_1= período del objeto a poner en órbita = 24hs

T_2= T_L= 27,32 días = 27,32x24 = 655,68 hs

a_1= semieje mayor de la órbita del objeto

a_2= semieje mayor de la órbita lunar = 384000 km. Entonces:

$$a_1 = a_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow$$

$$a_1 = 384000km \left(\frac{24}{655{,}68}\right)^{\frac{2}{3}} = 42333\ km$$

b) De la expresión de la excentricidad, podemos despejar el semieje menor b:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

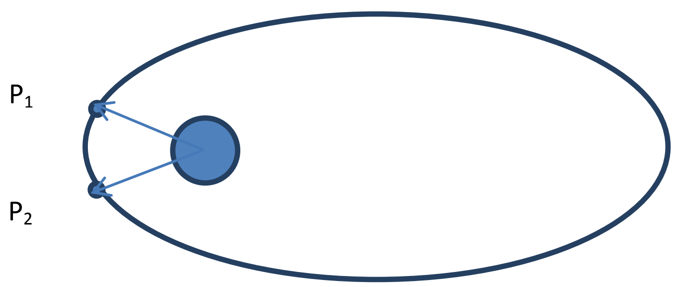
Sustituyendo, resulta

$$b = \ 42426 \text{ km } \times \sqrt{1 - (0.3)^2} = 40383\ km$$

La velocidad areolar es

$$vel_{areolar} = \frac{área\ de\ la\ elipse}{período\ de\ la\ órbita} = \frac{\pi ab}{T}$$

Según la Segunda Ley de Kepler, esta velocidad es la misma para cada sector de área de la elipse. Tomemos dos puntos vecinos al perihelio, como se muestra en la figura



El área del sector comprendido entre los puntos $P1$ y $P2$, es

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r_p \Delta r$$

donde r_p es el valor del radio vector en el perihelio y $\Delta r = r(P_1) - r(P_2) \sim r_p \delta\theta$. Entonces

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r_p v_p}{2}$$

donde v_p es la velocidad media en el perihelio. Usando la segunda Ley de Kepler

$$v_p = \frac{2\pi ab}{T\, r_p} \qquad (1)$$

con

$$r_p = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(0)} = a(1-e) = 29633 \text{ km}$$

Usando (1) obtenemos

$$V_p = 15103 \frac{km}{h}$$

c) En el caso del apogeo, vale $r_a = a\,(1+e) = 55033\ km$. Entonces

$$v_a = \frac{2\pi b}{T(1+e)} = 8132 \frac{km}{h}$$

d) La segunda Ley dice que la velocidad areolar es constante:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = const = \frac{\pi ab}{T}$$

Entonces, el área de cada sector se escribe

$$A_j = \frac{\pi ab}{T} t_j$$

donde t_j es el tiempo que le lleva al cuerpo recorrer esa área. Entonces podemos despejar:

$$t_j = \frac{T A_j}{\pi ab}$$

Usando esta relación y la tabla I, podemos asignar a cada A_j, el correspondiente valor de θ_j, y usando la relación

$$r(\theta_j) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta_j)}$$

podemos construir la tabla solicitada:

$$t_j \rightarrow r(t_j)$$

De la expresión para el área y de la tabla I, resultan los siguientes valores:

j	$\theta_j\,(rad)$	$A_j\ (km^2)$	$t_j\ (h)$	$r_j\ (km)$
0	0	0	0.00	29633
1	0.63	284188417	1.27	31007
2	1.26	624769314	2.79	35286
3	1.88	1094459309	4.89	42393
4	2.51	1783041166	7.97	50830
5	3.14	2685320840	12.00	55033
6	3.77	3587600515	16.03	50868
7	4.4	4276182372	19.11	42435
8	5.03	4745872367	21.21	35223
9	5.65	5086453264	22.73	31021
10	6.28	5370641681	24.00	29633

e) De acuerdo al enunciado introductorio, el técnico renacentista conocía la ley de conservación del momento.
Si denotamos por v_{cuerpo} y m_{cuerpo} la masa a poner en órbita, y si $v_{cañon}$ y $m_{cañon}$ son la velocidad y masa del cañón, se debe cumplir:

$$m_{cañon} v_{cañon} + m_{cuerpo}\ v_{cuerpo}\ = 0$$

Esta ecuación vale por la sugerencia hecha por Newton en cuanto al disparo horizontal. Entonces, con los datos provistos, tenemos que, en cada disparo el cañón se desplazará en sentido contrario al proyectil y su velocidad tras el disparo será:

$$v_{cañon} = -\frac{m_{cuerpo}}{m_{cañón}} v_{cuerpo}$$

La velocidad promedio del cañón tras el disparo es:

$$v_{cañon} = \frac{d}{t}$$

donde d es la distancia que recorre en determinado tiempo t. Si fijamos la distancia, y logramos medir el tiempo, podemos sacar la velocidad media del cañón en el retroceso y usando la ecuación de arriba, sacar la velocidad con que se lanzó el cuerpo al espacio. Hoy se sabe que el cuerpo entrará en órbita si se le imprime una velocidad de $11\frac{km}{s}$, aproximadamente.

Problema 2: ¡¡¡Acelerando a fondo con un LINAC!!!

Un ***acelerador lineal*** por radio frecuencia, denominado usualmente **LINAC**, es un dispositivo para acelerar partículas cargadas eléctricamente. En este tipo de ***aceleradores*** la partícula se desplaza en una trayectoria rectilínea, a lo largo de la cual es acelerada a intervalos por medio de un campo eléctrico de alta frecuencia.

En un modelo simplificado podemos considerar que un **LINAC** para acelerar iones está compuesto por una sucesión de tubos de desplazamiento metálicos separados por aberturas de aceleración, como se muestra esquemáticamente en la figura 1. Todo el sistema se encuentra dentro de una cámara evacuada a un alto nivel de vacío.

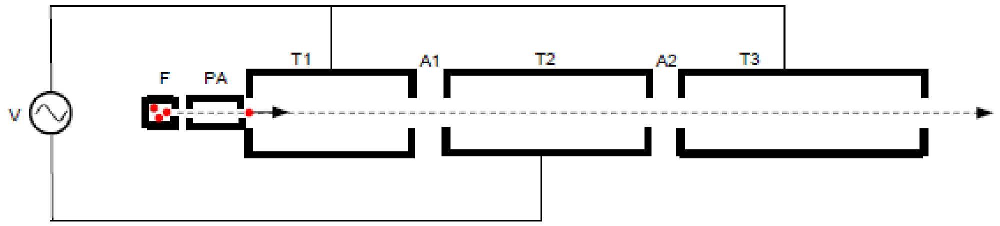


Figura 1: Esquema de un acelerador lineal de partículas (**LINAC**) con dos etapas de aceleración.

Con **F** se denomina la fuente de partículas y **PA** representa un pre-acelerador que inyecta partículas a una energía determinada en el **LINAC**. Con **T1, T2** y **T3** se indican los tubos de desplazamiento y con **A1 y A2** las aberturas de aceleración. **V** es una fuente de tensión alterna de alta frecuencia que alimenta al **LINAC**. La línea a trazos indica la trayectoria de las partículas aceleradas. Los tubos funcionan como electrodos y están conectados a una fuente de tensión de alta frecuencia. El potencial eléctrico $V(t)$, que origina el campo eléctrico acelerador a lo largo del eje ***dentro de las aberturas de aceleración***, varía sinusoidalmente con el tiempo como se muestra en la Figura 2.

El *acelerador* está diseñado de tal modo que, al atravesar una abertura, el ión es acelerado por la diferencia de potencial eléctrico que se establece entre los dos tubos adyacentes. El paso del ión por una abertura de aceleración está sincronizado con el máximo valor que puede alcanzar el potencial acelerador. Luego de acelerado, el ión ingresa a un tubo de desplazamiento, dentro del cual no experimenta la acción de ningún campo eléctrico. La distancia entre los centros de dos aberturas de aceleración consecutivas, está diseñada de modo que el ión arribe a la próxima abertura de aceleración en sincronismo con el máximo potencial acelerador. De esta manera, la partícula va ganando energía poco a poco a medida que atraviesa el acelerador.

Deseamos construir un **LINAC** para acelerar partículas *alfa*. Para ello disponemos de una fuente de alimentación **V,** de $20 MHz$ de frecuencia y una tensión máxima de $V_0 = 12{,}5\, kV$. Las partículas *alfa* son núcleos de ${}^{4}_{2}He$ (helio-4), es decir, están compuestas por dos protones y dos neutrones. En una etapa de pre-aceleración se eleva la energía cinética de las partículas *alfa* a $4{,}806\, 10^{-14}\, J$. A esta energía son inyectadas en el primer tubo de desplazamiento del **LINAC** en el instante de tiempo t = 0 (ver Figura 2).

Considere que la longitud de las aberturas de aceleración es chica, de modo que el tiempo de permanencia de la partícula en ellas es muy pequeño. De esta manera, el potencial eléctrico, y por lo tanto el campo eléctrico acelerador, puede aproximarse por un valor constante mientras la partícula se encuentra dentro de una abertura de aceleración.

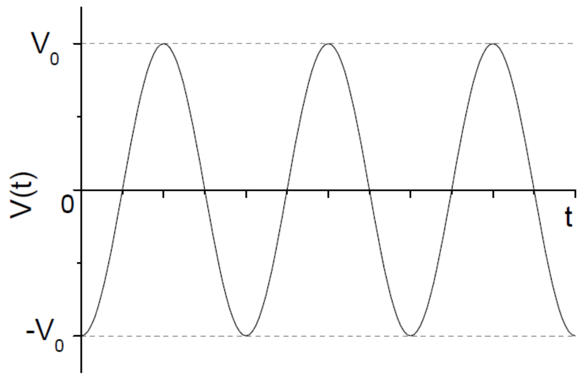


Figura 2: Potencial eléctrico aplicado a los tubos de desplazamiento en función del tiempo.

Tabla1: Valores de cantidades físicas de interés para el problema

Carga elemental	1,602176 634 10^{-19} C
Velocidad de la luz	299792458 m/s
Masa de la partícula *alfa*	4,001506179127 u
Nota: La unidad de masa atómica (u) está definida como la doceava parte de la masa atómica del ${}^{12}_{6}C$, es decir $1u = M({}^{12}_{6}C)/12$.	

Tabla2: Valores de masas atómicas

${}^{1}_{1}H$	1,007825 u
${}^{4}_{2}He$	4,002602 u
${}^{14}_{7}N$	14,003074 u
${}^{17}_{8}O$	16,999132 u
${}^{12}_{6}C$	19,926 4687992 10^{-27} kg
Nota: La unidad de masa atómica (u) está definida como la doceava parte de la masa atómica del ${}^{12}_{6}C$, es decir $1u = M({}^{12}_{6}C)/12$.	

a) ¿Cuál es la masa de la partícula *alfa* en kg? ¿Cuál es la carga eléctrica de la partícula *alfa*?

b) ¿Cuál es la velocidad de las partículas *alfa* cuando son inyectadas en el **LINAC**?

c) ¿Cuál debe ser la longitud del primer tubo de desplazamiento del **LINAC** (**T1** en la Figura 1)?

d) ¿Cuánta energía cinética gana la partícula *alfa* en la primera abertura de aceleración?

e) ¿Cuál debe ser la longitud del segundo tubo de desplazamiento del **LINAC** (**T2** en la Figura 1)?

f) ¿Cuánta energía cinética gana la partícula *alfa* en la segunda abertura de aceleración?

Fin Prueba Nivel 1

Continúa Prueba para Nivel 2

Utilizando el LINAC

Un proceso de interacción entre una partícula y un núcleo atómico puede dar lugar a una reacción nuclear. En estas reacciones, un núcleo, denominado núcleo blanco o núcleo padre y que designaremos genéricamente por X, es bombardeado por un proyectil, la partícula a, dando como resultado un núcleo residual o núcleo hijo, al que denominaremos Y, y a una partícula emitida b. La reacción nuclear se puede escribir simbólicamente de la siguiente manera:

$$a + X \rightarrow Y + b$$

En algunas reacciones nucleares la estructura del núcleo residual puede ser diferente a la del núcleo blanco, en este caso la reacción da lugar a una transmutación nuclear.

Una cantidad importante en este tipo de procesos es la energía de reacción Q. Esta energía se puede calcular a partir de la diferencia de las energías en reposo antes y después de la reacción. Si la partícula proyectil y la partícula emitida corresponden a núcleos atómicos, la energía de reacción se puede evaluar conociendo las masas atómicas correspondientes (M), es decir, mediante la siguiente expresión:

$$Q = (M_a + M_X - M_Y - M_b)\, c^2 \tag{1}$$

siendo c la velocidad de la luz. Es importante notar que las masas involucradas en la ecuación (1) se refieren a masas atómicas. Por lo tanto, M_a y M_b se refieren a las masas de los átomos cuyos núcleos son las partículas a y b.
Si el valor de Q es positivo, la reacción se denomina ***exotérmica***. En esta situación, Q es la energía total liberada en la reacción que se convierte en energía cinética de los productos finales de la reacción (núcleo residual Y y partícula emitida b).
En el caso en que Q resulte negativo, la reacción se denomina ***endotérmica***. Este tipo de reacción no puede ocurrir, a menos que la partícula incidente a tenga suficiente energía cinética. La energía cinética mínima que el proyectil a debe tener para que esta reacción pueda tener lugar se denomina energía umbral. A partir de principios de conservación se puede derivar la siguiente expresión para evaluar, de manera aproximada, la energía umbral E_u para una reacción endotérmica:

$$E_u = -Q\left(1 + \frac{M_a}{M_X}\right)$$

Consideremos ahora que deseamos estudiar la siguiente reacción nuclear:

$$\alpha + {}^{14}_{7}N \rightarrow p + {}^{17}_{8}O \tag{2}$$

en la que un núcleo de nitrógeno-14 (${}^{14}_{7}N$) es bombardeado con partículas *alfa* (α) dando lugar a la producción de núcleos de oxígeno-17 (${}^{17}_{8}O$) y protones (p). Teniendo en cuenta el balance de electrones, a fin de evaluar correctamente la energía de reacción a partir de las masas atómicas correspondientes, esta reacción puede escribirse de la siguiente manera:

$${}^{4}_{2}He + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$$

en donde hemos reemplazado en la expresión (2) a la partícula α por ${}^{4}_{2}He$ y al protón p (núcleo del átomo de hidrógeno) por ${}^{1}_{1}H$. Cabe mencionar que esta reacción particular tiene interés histórico debido a que fue la reacción estudiada por Ernest Rutherford en 1919, dando lugar a la primera transmutación nuclear inducida en un laboratorio. En aquella oportunidad Rutherford utilizó partículas *alfa* emitidas por una fuente radiactiva debido a que aún no se habían desarrollado los aceleradores de partículas.

g) ¿La reacción expresada en (2) es exotérmica o endotérmica?

h) ¿Cuál es la energía umbral E_u para que ocurra esta reacción?

i) ¿Cuántas etapas de aceleración deben construirse en el **LINAC** anterior para poder estudiar esta reacción?

Hoja de Respuestas Problema 2:
¡¡¡Acelerando a fondo con un LINAC!!!

		Pts
a)	masa de la partícula *alfa*: carga eléctrica de la partícula *alfa:*	
b)	velocidad de las partículas *alfa*:	
c)	la longitud del primer tubo de desplazamiento (**T1**):	
d)	energía cinética que gana la partícula *alfa* en la primera abertura (**A1**):	
e)	longitud del segundo tubo de desplazamiento (**T2)***:*	
f)	energía cinética que gana la partícula *alfa* en la segunda abertura (**A2**):	
Fin Nivel 1, continúa Nivel 2		
g)	la reacción expresada en (2) es:	
h)	la energía umbral E_u es:	
i)	Deben construirse:	

Hoja de Respuestas Problema Nº2 :

Acelerando a fondo con un LINAC!!!

		Pts
a)	masa de la partícula *alfa*: $m_{alfa}\,[\mathrm{kg}] = 6{,}644658\ 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ carga eléctrica de la partícula *alfa:* $q_{alfa} = 3{,}204353\ 10^{-19}\ \mathrm{C}$	
b)	velocidad de las partículas *alfa*: $v_1 = 3{,}803597\ \ 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	
c)	la longitud del primer tubo de desplazamiento (**T1**): $L_1 = 9{,}508993\ \ 10^{-2}\ \mathrm{m}\ \ \approx 9{,}5\ \mathrm{cm}$	
d)	energía cinética que gana la partícula *alfa* en la primera abertura (**A1**): $W = 8{,}010883\ \ 10^{-16}\ \mathrm{J}$	
e)	longitud del segundo tubo de desplazamiento (**T2)***:* $L_2 = 1{,}027089\ \ \ 10^{-1}\ \mathrm{m}\ \ \approx 10{,}3\ \mathrm{cm}$	
f)	energía cinética que gana la partícula *alfa* en la segunda abertura (**A2**): $W = 8{,}010883\ \ 10^{-16}\ \mathrm{J}$	
Fin Nivel 1, continúa Nivel 2		

continúa Nivel 2		
g)	la reacción expresada en (2) es: $$Q = -1{,}912356\ 10^{-18}\ \mathrm{J} < 0$$ → reacción endotérmica	
h)	la energía umbral es: $$E_u = 2{,}458978\ 10^{-13}\ \mathrm{J}$$	
i)	Deben construirse, como mínimo 25 etapas de aceleración.	

Solución Problema "*Acelerando a fondo con un LINAC!!!* "

a) ¿Cuál es la masa de la partícula *alfa* en kg? ¿Cuál es la carga eléctrica de la partícula *alfa*?

Constante de masa atómica:

$$k \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}}\right] = \frac{M\left({}^{12}_{6}\mathrm{C}\right)}{12} = \frac{19{,}9264687992 \;\; 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{12} = 1{,}660539\; 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}}$$

Masa de la partícula alfa:

$$m_{alfa}\,[\mathrm{kg}] = 6{,}644658\; 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Carga eléctrica de la partícula alfa q_{alfa}:

$$q_{alfa} = 2\,e = 2 \;\; 1{,}602176\,634\; 10^{-19}\;\mathrm{C}$$

$$q_{alfa} = 3{,}204353\; 10^{-19}\;\mathrm{C}$$

b) ¿Cuál es la velocidad de las partículas *alfa* cuando son inyectadas en el **LINAC**?

Energía de inyección: $E_1 = \;\; 4{,}806\; 10^{-14}\;\mathrm{J}$

$$E_1 = \frac{1}{2} m\, v_1^2 \;\rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m_{alfa}}}$$

Velocidad de las partículas alfa cuando son inyectadas en el LINAC:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \quad 4{,}806\; 10^{-14}\;\mathrm{J}}{6{,}644658\; 10^{-27}\,\mathrm{kg}}}$$

$$v_1 = 3{,}803597 \;\; 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) ¿Cuál debe ser la longitud del primer tubo de desplazamiento del **LINAC** (**T1** en la Figura 1)?

Frecuencia:

$$f = 20\ \mathrm{MHz} = 20\ \ 10^{6}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20\quad 10^{6}\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 5\ \ 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

Longitud del primer tubo de desplazamiento:

$$L_1 = v_1\,\frac{T}{2} = 3{,}803597\ \ 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \frac{5\ \ 10^{-8}\ \mathrm{s}}{2}$$

$$L_1 = 9{,}508993\ \ 10^{-2}\ \mathrm{m}\ \ \approx 9{,}5\ \mathrm{cm}$$

d) ¿Cuánta energía cinética gana la partícula *alfa* en la primera abertura de aceleración?

Tensión máxima: $V_0 = 12{,}5\ \ 10^{3}\ \mathrm{V}$

Energía cinética adquirida por la partícula alfa en la primer abertura de aceleración:

$$W = q_{alfa}\ (2\,V_0) = 3{,}204353\ 10^{-19}\ \mathrm{C}\quad (2\quad 12{,}5\ \ 10^{3}\ \mathrm{V})$$

$$W = 8{,}010883\ \ 10^{-16}\ \mathrm{J}$$

e) ¿Cuál debe ser la longitud del segundo tubo de desplazamiento del **LINAC** (**T2** en la Figura 1)?

Energía al ingresar al segundo tubo:

$$E_2 = E_1 + W = 4{,}806\ 10^{-14}\ \mathrm{J}\ +\ 8{,}010883\ \ 10^{-16}\ \mathrm{J} = 5{,}607618\ 10^{-14}\ \mathrm{J}$$

Velocidad al ingresar al segundo tubo:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{m_{alfa}}} = \sqrt{\frac{2 \quad 5{,}607618\ 10^{-14}\ \mathrm{J}}{6{,}644658\ 10^{-27}\mathrm{kg}}}$$

$$v_2 = 4{,}108355\ \ 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Longitud del segundo tubo de desplazamiento:

$$L_2 = v_2\,\frac{T}{2} = 4{,}108355\ \ 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\quad \frac{5\ \ 10^{-8}\ \mathrm{s}}{2}$$

$$L_2 = 1{,}027089\ \ 10^{-1}\ \mathrm{m}\ \ \approx 10{,}3\ \mathrm{cm}$$

f) ¿Cuánta energía cinética gana la partícula *alfa* en la segunda abertura de aceleración?

El mismo resultado que en el inciso (d),

$W = 8{,}010883\ \ 10^{-16}\ \mathrm{J}$

Fin Prueba Nivel 1

g) ¿Es la reacción expresada en (2) exotérmica o endotérmica?

Energía de reacción:

$$Q = [\ M({}_{2}^{4}\mathrm{He}\ ) +\ M({}_{7}^{14}\mathrm{N}\ ) - M({}_{1}^{1}\mathrm{H}\ ) +\ M({}_{8}^{17}\mathrm{O}\ )]\ \ c^2$$

$$Q = [\ 4{,}002602\ \mathrm{u}\ +\ 14{,}003074\ \mathrm{u} -\ 1{,}007825\ \mathrm{u} \\ -16{,}999132\ \mathrm{u}]\ \ 1{,}660539\ 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}}\ \ (299792458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2$$

$Q =\ -1{,}912356\ 10^{-18}\ \mathrm{J} < 0$ → reacción endotérmica

h) ¿Cuál es la energía umbral E_u para que ocurra esta reacción?

Energía umbral

$$E_u = -\,Q\,\left(1 + \frac{M({}_{2}^{4}\mathrm{He}\ )}{M({}_{7}^{14}\mathrm{N}\ )}\right) = -(-1{,}912356\ 10^{-18}\ \mathrm{J})\left(1 + \frac{4{,}002602\ \mathrm{u}}{14{,}003074\ \mathrm{u}}\right)$$

$E_u = 2{,}458978\ 10^{-13}$ J

i) ¿Cuántas etapas de aceleración deben construirse en el **LINAC** anterior para poder estudiar esta reacción?

Energía cinética de la partícula alfa al cabo de N estapas de aceleración:

$$E = E = E_1 + N\,W$$

Condición para que la partícula alfa pueda generar la reacción:

$$E \geq E_u \quad \rightarrow \quad E_1 + N\,W \geq E_u \quad \rightarrow N \geq \frac{E_u - E_1}{W}$$

$$N \geq \frac{2{,}458978\ 10^{-13}\ \text{J} - 4{,}806\ 10^{-14}\ \text{J}}{8{,}010883\ \ 10^{-16}\ \text{J}} = 24{,}695470$$

Deben construirse, como mínimo 25 etapas de aceleración.

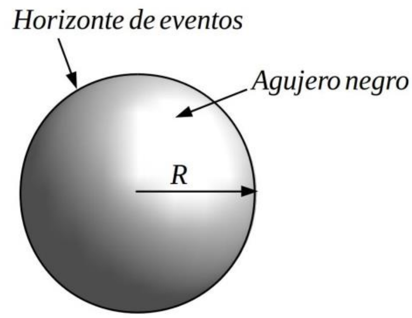
Problema Teórico 3 - NIVEL 1

Problema 3: Agujeros Negros y la curvatura del Espacio-tiempo

Constantes Físicas

- Masa solar $M_{sol} = 2\ 10^{30}$ kg.
- Constante de la gravitación de Newton $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
- Constante de Planck $h = 6{,}6\ 10^{-34}$ J s
- Velocidad de la luz $c = 3\ 10^8$ m s^{-1}
- Constante de Faraday $F = 96\ 10^3$ C mol^{-1}
- Permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 1{,}26\ 10^{-6}$ N A^{-2}

Los Agujeros Negros son una de las predicciones más fascinantes de la teoría de la Relatividad General de Einstein. Diminutos, enormes, supermasivos, poco masivos, rotantes, estáticos, solitarios o acompañados. Todos diferentes, pero todos raros y un poco locos. Y con una cosa en común: deforman el espacio-tiempo de tal manera que, si algo atraviesa su horizonte de eventos, entonces ya no puede salir.



En muchas situaciones, el campo gravitatorio de un agujero negro se puede describir usando la ley de gravitación de Newton. Sin embargo, hay fenómenos que no se pueden explicar "a lo Newton" y necesitan toda la maquinaria de la teoría de la Relatividad.

En este problema estudiaremos cómo "ver" un agujero negro y cómo medir algunos de sus parámetros básicos. También analizaremos qué nos pasaría si atravesáramos el horizonte de eventos de un agujero negro. Finalmente estudiaremos cómo el agujero negro curva el espacio-tiempo y cómo esto afecta nuestras ideas de tiempo.

PARTE 1. ***Sagitario A* en el centro de la Vía Láctea***

Los agujeros negros son... negros. Sí. No se pueden ver directamente, si los "iluminamos" con una linterna, la luz no se refleja en el horizonte de eventos. Entra y ya no sale.
Hace varios años se detectó, en el centro de nuestra Vía Láctea, un objeto muy masivo y compacto llamado Sagitario A*. Este objeto no se pudo describir con los modelos estándar, por lo que se pensó que era un agujero negro (actualmente se cree que puede haber más de un agujero negro en la región central de nuestra galaxia).

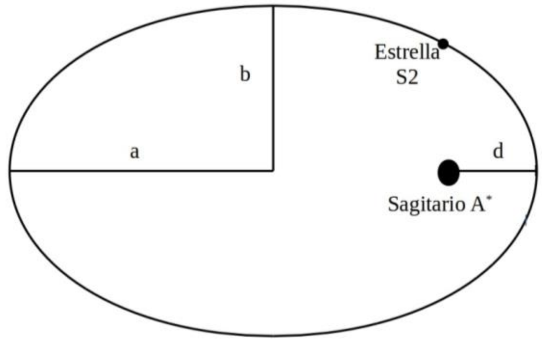
Una manera de estimar la masa y el tamaño de Sagitario A* es a través del estudio de las órbitas elípticas de las estrellas a su alrededor. Consideraremos que estas órbitas se describen con las Leyes de Kepler.

En particular, aproximaremos la tercera ley de Kepler en la forma

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} \tag{1}$$

donde T es el período orbital, a es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica, M es la masa del cuerpo alrededor del cual la estrella orbita (en este caso, Sagitario A*) y G la constante de gravitación universal de Newton.

Problema Teórico 3 - NIVEL 1



Una de las estrellas más próximas a Sagitario A* es la estrella S2, cuyo movimiento orbital tiene las siguientes características

- $a = 840\,\mathrm{UA} = 1{,}3\ 10^{14}\mathrm{m}$, **Longitud del semieje mayor**
- $T = 15\,\text{años}$, **Período orbital**
- $e = 0{,}989$, **Excentricidad**

donde UA (unidad astronómica) es $1\mathrm{UA} = 150\ 10^{9}\ \mathrm{m}$ y e es la excentricidad de la órbita elíptica

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad (2)$$

con b la longitud del semieje menor. Otro parámetro importante de la órbita es la distancia d al perihelio, el punto más próximo de la órbita al foco donde se encuentra el cuerpo masivo,

$$d = a(1 - e) \qquad (3)$$

1a. A partir de los datos de la órbita de S2 estime la masa M de Sagitario A*.

1b. Indique cuánto mide el semieje menor b y la distancia al perihelio d en la órbita de S2.

1c. Teniendo en cuenta que S2 puede pensarse como un punto cuando se mueve en su órbita, y que no choca con Sagitario A*, dé una cota superior para el radio de Sagitario A*. Es decir, ¿qué valor no puede superar el radio de Sagitario A*? *Nota: Una cota superior para una cantidad f es un valor que es mayor que f.*

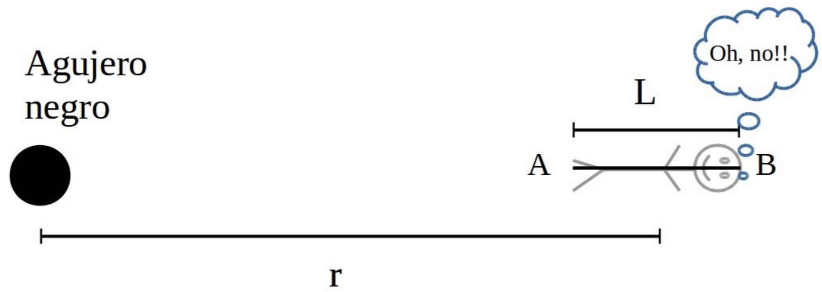
1d. Usando la estimación anterior calcule la densidad que le correspondería a Sagitario A*.

PARTE 2. ¿¿O será demasiado tarde??

Nos decidimos a hacer un viaje espacial. Sabemos que hay un agujero negro cerca, pero no sabemos cuán cerca. De pronto sentimos cosas raras en el cuerpo... ¿Habremos atravesado el horizonte de eventos? ¿Podremos escapar? ¿Será demasiado tarde?

Problema Teórico 3 - NIVEL 1

Consideremos una persona en el campo gravitatorio de un agujero negro con los pies apuntando al centro del agujero negro, como se ve en la figura siguiente.



Suponiendo que el campo gravitatorio del agujero negro se puede describir por la ley de gravitación de Newton, encontramos que diferentes puntos del cuerpo sienten diferentes fuerzas, ya que se encuentran a diferentes distancias del agujero negro. A pesar de que todos los puntos del cuerpo son acelerados hacia el agujero negro, los pies son atraídos con más fuerza que la cabeza. Por lo tanto, la persona siente que la cabeza y los pies son tironeados en sentidos opuestos, y el cuerpo tiende a estirarse. Este fenómeno se conoce como "espaguetización" porque el cuerpo se estira y afina como un espagueti.
Para simplificar el análisis, modelamos el cuerpo humano por un segmento de longitud L que se ubica a lo largo de una línea que pasa por el centro del agujero negro. Suponemos que el centro del cuerpo está a una distancia r del centro del agujero negro. Ver Figura.

2a. Dé una expresión para la aceleración gravitatoria a que siente el punto central del cuerpo y para la aceleración gravitatoria a_A que siente el punto extremo del cuerpo más próximo al agujero negro indicado en la figura como A. Escríbalas en términos de la constante de gravitación universal de Newton G, la masa del agujero negro M , r y L.

2b. Dé una expresión para la aceleración que siente el punto A con respecto a la que siente el punto medio del mismo. Es decir, escriba

$$a_{0A} = a_A - a \tag{4}$$

en términos de G, M, r y L. Esta aceleración relativa se llaman **aceleración de marea.**

2c. Tome el límite en que la longitud del cuerpo es mucho menor que la distancia al centro del agujero negro, $L << r$ para determinar claramente el signo de la aceleración de marea. Indique su sentido.
Puede ser útil la expresión

$$\frac{1}{(1 \pm x)^2} \approx 1 \mp 2x \tag{5}$$

válida cuando $x << 1$.

Para entender el efecto de marea que producen los agujeros negros sobre el cuerpo, vamos a considerar dos agujeros negros bien distintos:

Problema Teórico 3 - NIVEL 1

- AN1: Agujero negro supermasivo
  - masa: $M_1 = 2\ \ 10^{\,39}\,\mathrm{kg}$ (mil millones de masas solares).
  - radio del horizonte de eventos $R_1 = 3\ \ 10^{\,12}\,\mathrm{m}$ (30 mil millones de kilómetros).

- AN2: Agujero negro estelar
  - masa: $M_2 = 2\ \ 10^{\,31}\,\mathrm{kg}$ (10 masas solares).
  - radio del horizonte de eventos $R_2 = 3\ \ 10^{\,4}\,\mathrm{m}$ (30 kilómetros).

2d. Suponiendo que cuando la aceleración de marea es igual a $10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$, una persona siente incomodidad, calcule a qué distancia del centro de AN1 y de AN2 ocurre esto. Suponga que la longitud de la persona es $L = 2\ \mathrm{m}$.

PARTE 3. Dilatación gravitacional del tiempo

En la teoría de la Relatividad General, la gravedad se manifiesta a través de la curvatura del espacio y el tiempo. Esto hace, en particular, que el tiempo corra de diferente forma en regiones con campos gravitatorios de distinta intensidad, por ejemplo cerca de un agujero negro o lejos de él. Cuanto más cerca uno está de un objeto muy masivo, más lento corre el tiempo. Este efecto resulta de la constancia de la velocidad de la luz y se usa a diario, por ejemplo en el Sistema de Posicionamiento Global (GPS).
Pensemos que a una distancia r del centro un agujero negro, está Schrödinger con un gato (vivo y afuera de la caja). El gato tiene pulgas. El gato se rasca dos veces. A una distancia muy muy grande de ellos y del agujero negro está Einstein. Einstein está tan lejos del agujero negro que prácticamente no siente su campo gravitatorio. Tanto Schrödinger como Einstein miden el tiempo que pasa entre las dos veces que el gato se rasca. El tiempo que encuentra Schrödinger es T_S y el tiempo que encuentra Einstein es T_E. Cuando comparan las dos mediciones encuentran

$$T_E = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha\,\frac{2\,M}{r}}}\; T_S \qquad (6)$$

donde M es la masa del agujero negro, r es la distancia a la que se encuentra Schrödinger del centro un agujero negro y α es una constante positiva dimensional. Esta fórmula se conoce como Dilatación gravitacional del tiempo y funciona para agujeros negros no rotantes, llamados agujeros negros de **Schwarzschild**.

3a. ¿Quién mide un tiempo más largo? ¿Schrödinger o Einstein?

3b. ¿Qué unidades tiene la constante α que aparece en la fórmula de la dilatación del tiempo (6)?

3c. Suponiendo que la constante α depende sólo de dos de las constantes físicas presentadas al comienzo del problema sin constantes numéricas adicionales encuentre α explícitamente en términos de estas constantes.

Hoja de Respuestas Problema 3 - NIVEL 1

¡¡¡Agujeros Negros y la curvatura del Espacio-tiempo!!!

		Pts
1a.	La masa M de Sagitario A* es:	
1b.	el semieje menor b es: la distancia al perihelio d es:	
1c.	una cota superior para el radio de Sagitario A* es:	
1d.	la densidad es:	
2a.	la aceleración gravitatoria a : la aceleración gravitatoria a_A es:	
2b.	aceleración de marea $a_{0A} = a_A - a$ es:	
2c.	el signo de la aceleración de marea es: el sentido es:	
2d.	la distancia del centro de AN1 es: la distancia del centro de AN2 es:	
3a.	¿Schrödinger o Einstein?	
3b.	Las unidades de α son:	
3c.	α explícitamente en términos de estas constantes:	

Hoja de Respuestas Problema Nº3:

Nivel 1

Agujeros Negros y la curvatura del Espacio-tiempo !!!

		Pts
1a.	La masa de Sagitario A* es aproximadamente $$M = 5.6\ 10^{36}\ kg$$ es decir, unos 4 millones de masas solares	
1b.	El semieje menor de la órbita de S2 es: $$b = 1.9\ 10^{13}\ m$$ La distancia al perihelio es $$d = 1.4\ 10^{12}\ m$$	
1c.	Una cota al radio de Sagitario A* es $$R \leq d = 1.4\ 10^{12}\ m$$ Una cota peor es la longitud del semieje menor.	
1d.	La densidad de Sagitario A* se puede estimar como $$\rho = 0.49\ \frac{kg}{m^3}$$	
2a.	la aceleración gravitatoria a : $$a = \frac{G\ M}{r^2}$$ la aceleración gravitatoria a_A es: $$a_A = \frac{G\ M}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2}$$	

2b.	aceleración de marea $a_{0A} = a_A - a$ es: Las aceleraciones relativas son: Para el punto A $a_{0A} = a_A - a = \frac{G\ M}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{G\ M}{r^2}$	
2c.	el signo de la aceleración de marea es: EL MISMO SIGNO QUE EL DE a el sentido es: HACIA EL AGUJERO NEGRO	
2d.	la distancia del centro de AN1 es: La persona sentirá incomodidad a 3 10^6 km o 3 millones de kilómetros del centro del AN1 la distancia del centro de AN2 es: 6 10^3 km o 6 mil kilómetros del centro del AN2.	
3a.	¿Schrödinger o Einstein? Einstein	
3b.	Las unidades de α son: $\frac{m}{kg}$	
3c.	α explícitamente en términos de estas constantes: $\alpha = \frac{G}{c^2}$	

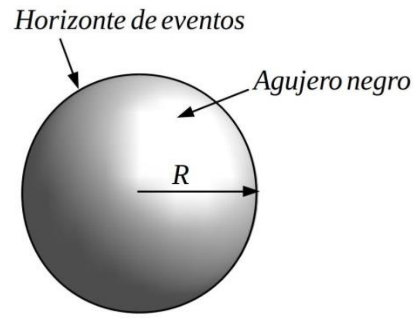
Problema Teórico 3 - NIVEL 2

Problema 3: Agujeros Negros y la curvatura del Espacio-tiempo

Constantes Físicas

- Masa solar M_{sol} = 2 10^{30} kg.
- Constante de la gravitación de Newton G = 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}
- Constante de Planck h = 6,6 10^{-34} J s
- Velocidad de la luz c = 3 10^8 m s^{-1}
- Constante de Faraday F = 96 10^3 C mol^{-1}
- Permeabilidad magnética del vacío μ_0 = 1,26 10^{-6} N A^{-2}

Los Agujeros Negros son una de las predicciones más fascinantes de la teoría de la Relatividad General de Einstein. Diminutos, enormes, supermasivos, poco masivos, rotantes, estáticos, solitarios o acompañados. Todos diferentes, pero todos raros y un poco locos. Y con una cosa en común: deforman el espacio-tiempo de tal manera que, si algo atraviesa su horizonte de eventos, entonces ya no puede salir.



En muchas situaciones, el campo gravitatorio de un agujero negro se puede describir usando la ley de gravitación de Newton. Sin embargo, hay fenómenos que no se pueden explicar “a lo Newton” y necesitan toda la maquinaria de la teoría de la Relatividad.

En este problema estudiaremos cómo “ver” un agujero negro y cómo medir algunos de sus parámetros básicos. También analizaremos qué nos pasaría si atravesáramos el horizonte de eventos de un agujero negro. Finalmente estudiaremos cómo el agujero negro curva el espacio-tiempo y cómo esto afecta nuestras ideas de tiempo.

PARTE 1. Sagitario A* en el centro de la Vía Láctea

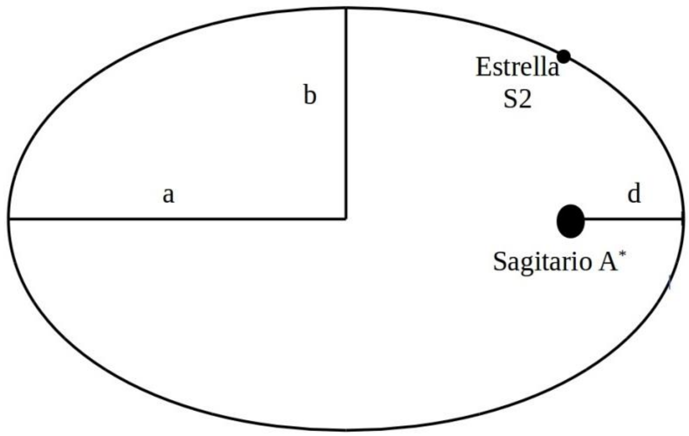
Los agujeros negros son... negros. Sí. No se pueden ver directamente, si los “iluminamos” con una linterna, la luz no se refleja en el horizonte de eventos. Entra y ya no sale.
Hace varios años se detectó, en el centro de nuestra Vía Láctea, un objeto muy masivo y compacto llamado Sagitario A*. Este objeto no se pudo describir con los modelos estándar, por lo que se pensó que era un agujero negro (actualmente se cree que puede haber más de un agujero negro en la región central de nuestra galaxia).
Una manera de estimar la masa y el tamaño de Sagitario A* es a través del estudio de las órbitas elípticas de las estrellas a su alrededor. Consideraremos que estas órbitas se describen con las Leyes de Kepler.

En particular, aproximaremos la tercera ley de Kepler en la forma

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} \qquad (1)$$

donde T es el período orbital, a es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica, M es la masa del cuerpo alrededor del cual la estrella orbita (en este caso, Sagitario A*) y G la constante de gravitación universal de Newton.

Problema Teórico 3 - NIVEL 2



Una de las estrellas más próximas a Sagitario A* es la estrella S2, cuyo movimiento orbital tiene las siguientes características

- $a = 840 \text{ UA} = 1{,}3\ 10^{14}\text{m}$, **Longitud del semieje mayor**
- $T = 15 \text{ años}$, **Período orbital**
- $e = 0{,}989$, **Excentricidad**

donde UA (unidad astronómica) es $1\text{UA} = 150\ 10^9 \text{ m}$ y e es la excentricidad de la órbita elíptica

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad (2)$$

con b la longitud del semieje menor. Otro parámetro importante de la órbita es la distancia d al perihelio, el punto más próximo de la órbita al foco donde se encuentra el cuerpo masivo,

$$d = a(1 - e) \qquad (3)$$

1a. A partir de los datos de la órbita de S2 estime la masa M de Sagitario A*.

1b. Indique cuánto mide el semieje menor b y la distancia al perihelio d en la órbita de S2.

1c. Teniendo en cuenta que S2 puede pensarse como un punto cuando se mueve en su órbita, y que no choca con Sagitario A*, dé una cota superior para el radio de Sagitario A*. Es decir, ¿qué valor no puede superar el radio de Sagitario A*? *Nota: Una cota superior para una cantidad f es un valor que es mayor que f.*

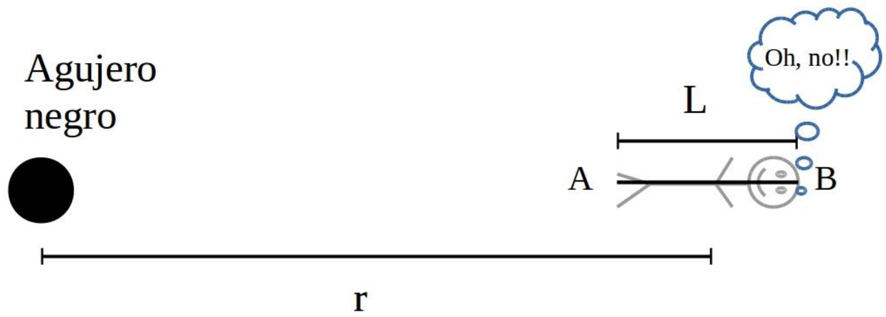
1d. Usando la estimación anterior calcule la densidad que le correspondería a Sagitario A*.

PARTE 2. ¿¿O será demasiado tarde??

Nos decidimos a hacer un viaje espacial. Sabemos que hay un agujero negro cerca, pero no sabemos cuán cerca. De pronto sentimos cosas raras en el cuerpo... ¿Habremos atravesado el horizonte de eventos? ¿Podremos escapar? ¿Será demasiado tarde?

Problema Teórico 3 - NIVEL 2

Consideremos una persona en el campo gravitatorio de un agujero negro con los pies apuntando al centro del agujero negro, como se ve en la figura.



Suponiendo que el campo gravitatorio del agujero negro se puede describir por la ley de gravitación de Newton, encontramos que diferentes puntos del cuerpo sienten diferentes fuerzas, ya que se encuentran a diferentes distancias del agujero negro. A pesar de que todos los puntos del cuerpo son acelerados hacia el agujero negro, los pies son atraídos con más fuerza que la cabeza. Por lo tanto, la persona siente que la cabeza y los pies son tironeados en sentidos opuestos, y el cuerpo tiende a estirarse. Este fenómeno se conoce como "espaguetización" porque el cuerpo se estira y afina como un espagueti.
Para simplificar el análisis, modelamos el cuerpo humano por un segmento de longitud L que se ubica a lo largo de una línea que pasa por el centro del agujero negro. Suponemos que el centro del cuerpo está a una distancia r del centro del agujero negro. Ver Figura.

2a. Dé una expresión para la aceleración gravitatoria a que siente el punto central del cuerpo y para la aceleración gravitatoria a_A que siente el punto extremo del cuerpo más próximo al agujero negro indicado en la figura como A. Escríbalas en términos de la constante de gravitación universal de Newton G, la masa del agujero negro M , r y L.

2b. Dé una expresión para la aceleración que siente el punto A con respecto a la que siente el punto medio del mismo. Es decir, escriba

$$a_{0A} = a_A - a \tag{4}$$

en términos de G, M, r y L. Esta aceleración relativa se llama **aceleración de marea.**

2c. Tome el límite en que la longitud del cuerpo es mucho menor que la distancia al centro del agujero negro, $L << r$ para determinar claramente el signo de la aceleración de marea. Indique su sentido.
Puede ser útil la expresión

$$\frac{1}{(1 \pm x)^2} \approx 1 \mp 2x \tag{5}$$

válida cuando $x << 1$.

Para entender el efecto de marea que producen los agujeros negros sobre el cuerpo, vamos a considerar dos agujeros negros bien distintos:

Problema Teórico 3 - NIVEL 2

- AN1: Agujero negro supermasivo
  - masa: $M_1 = 2\ \ 10^{\,39}\,\mathrm{kg}$ (mil millones de masas solares).
  - radio del horizonte de eventos $R_1 = 3\ \ 10^{\,12}\,\mathrm{m}$ (30 mil millones de kilómetros).

- AN2: Agujero negro estelar
  - masa: $M_2 = 2\ \ 10^{\,31}\,\mathrm{kg}$ (10 masas solares).
  - radio del horizonte de eventos $R_2 = 3\ \ 10^{\,4}\,\mathrm{m}$ (30 kilómetros).

2d. Suponiendo que cuando la aceleración de marea es igual a $10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$, una persona siente incomodidad calcule a qué distancia del centro de AN1 y de AN2 ocurre esto. Suponga que la longitud de la persona es $L\ =\ 2\ \mathrm{m}$.

2e. Cuando la persona siente incomodidad ¿podrá alejarse del agujero negro o es demasiado tarde para escapar? Responda esto para los agujeros negros AN1 y AN2.

PARTE 3. Dilatación gravitacional del tiempo

En la teoría de la Relatividad General, la gravedad se manifiesta a través de la curvatura del espacio y el tiempo. Esto hace, en particular, que el tiempo corra de diferente forma en regiones con campos gravitatorios de distinta intensidad, por ejemplo cerca de un agujero negro o lejos de él. Cuanto más cerca uno está de un objeto muy masivo, más lento corre el tiempo. Este efecto resulta de la constancia de la velocidad de la luz y se usa a diario, por ejemplo en el Sistema de Posicionamiento Global (GPS).
Pensemos que a una distancia r del centro un agujero negro, está Schrödinger con un gato (vivo y afuera de la caja). El gato tiene pulgas. El gato se rasca dos veces. A una distancia muy muy grande de ellos y del agujero negro está Einstein. Einstein está tan lejos del agujero negro que prácticamente no siente su campo gravitatorio. Tanto Schrödinger como Einstein miden el tiempo que pasa entre las dos veces que el gato se rasca. El tiempo que encuentra Schrödinger es T_S y el tiempo que encuentra Einstein es T_E. Cuando comparan las dos mediciones encuentran

$$T_E = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha\,\frac{2\,M}{r}}}\ T_S \tag{6}$$

donde M es la masa del agujero negro, r es la distancia a la que se encuentra Schrödinger del centro un agujero negro y α es una constante positiva dimensional. Esta fórmula se conoce como Dilatación gravitacional del tiempo y funciona para agujeros negros no rotantes, llamados agujeros negros de **Schwarzschild**.

3a. ¿Quién mide un tiempo más largo? ¿Schrödinger o Einstein?

3b. ¿Qué unidades tiene la constante α que aparece en la fórmula de la dilatación del tiempo (6)?

Problema Teórico 3 - NIVEL 2

3c. Suponiendo que la constante α depende sólo de dos de las constantes físicas presentadas al comienzo del problema, sin constantes numéricas adicionales, encuentre α explícitamente en términos de estas constantes.
Si no la puede encontrar suponga que su valor numérico es 1 en los ítems que siguen.

Una fuente de rayos X que emite radiación de 6 keV (o 9,6 10^{-16}J) de energía está ubicada a 20 km del centro de un agujero negro de Schwarzschild de 3,3 masas solares.

3d. Calcule la frecuencia de los rayos X emitidos

3e. Indique la frecuencia de los rayos X recibidos por un observador muy distante de la fuente y del agujero negro. ¿Hubo un corrimiento al rojo o al azul?

Hoja de Respuestas Problema 3 - NIVEL 2
¡¡¡Agujeros Negros y la curvatura del Espacio-tiempo!!!

		Pts
1a.	La masa M de Sagitario A* es:	
1b.	el semieje menor b es: la distancia al perihelio d es:	
1c.	una cota superior para el radio de Sagitario A* es:	
1d.	la densidad es:	
2a.	la aceleración gravitatoria a : la aceleración gravitatoria a_A es:	
2b.	aceleración de marea $a_{0A} = a_A - a$ es:	
2c.	el signo de la aceleración de marea es: el sentido es:	
2d.	la distancia del centro de AN1 es: la distancia del centro de AN2 es:	
2e.	En AN1: En AN2:	
3a.	¿Schrödinger o Einstein?	
3b.	Las unidades de α son:	
3c.	α explícitamente en términos de estas constantes:	
3d.	la frecuencia de los rayos X emitidos es:	
3e.	¿Hubo un corrimiento al rojo o al azul?	

Hoja de Respuestas Problema Nº3:

Nivel 2

Agujeros Negros y la curvatura del Espacio-tiempo !!!

		Pts
1a.	La masa de Sagitario A* es aproximadamente $$M = 5.6\ 10^{36}\ kg$$ es decir, unos 4 millones de masas solares	
1b.	El semieje menor de la órbita de S2 es: $$b = 1.9\ 10^{13}\ m$$ La distancia al perihelio es $$d = 1.4\ 10^{12}\ m$$	
1c.	Una cota al radio de Sagitario A* es $$R \leq d = 1.4\ 10^{12}\ m$$ Una cota peor es la longitud del semieje menor.	
1d.	La densidad de Sagitario A* se puede estimar como $$\rho = 0.49\ \frac{kg}{m^3}$$	
2a.	la aceleración gravitatoria a : $$a = \frac{G\ M}{r^2}$$ la aceleración gravitatoria a_A es: $$a_A = \frac{G\ M}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2}$$	

2b.	aceleración de marea $a_{0A} = a_A - a$ es: Las aceleraciones relativas son: Para el punto A $a_{0A} = a_A - a = \frac{G\,M}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{G\,M}{r^2}$	
2c.	el signo de la aceleración de marea es: EL MISMO SIGNO QUE EL DE a el sentido es: HACIA EL AGUJERO NEGRO	
2d.	la distancia del centro de AN1 es: La persona sentirá incomodidad a 3 10^6 km o 3 millones de kilómetros del centro del AN1 la distancia del centro de AN2 es: 6 10^3 km o 6 mil kilómetros del centro del AN2.	
2e.	Como $r_1 < R_1$, cuando la persona sienta incomodidad, ya estará adentro del agujero AN1 y no podrá salir. Como $r_2 > R_2$, cuando la persona sienta incomodidad, estará afuera del agujero AN2 y podrá escapar.	
3a.	¿Schrödinger o Einstein? Einstein	
3b.	Las unidades de α son: $\frac{m}{kg}$	
3c.	α explícitamente en términos de estas constantes: $\alpha = \frac{G}{c^2}$	

3d.	la frecuencia de los rayos X emitidos es: $$1.45\ \ 10^{18}\ Hz$$	
3e.	¿Hubo un corrimiento al rojo o al azul? La frecuencia de los rayos recibidos es $$f_{recibida}\ = 1.0\ 10^{18}\quad Hz$$ como es menor que la emitida decimos que hubo un corrimiento al rojo en frecuencia.	

Problema 3 Nivel 2
Soluciones y Respuestas

PARTE 1. Sagitario A* en el centro de la Vía Láctea

1a. A partir de los datos de la órbita de S2 estime la masa M de Sagitario A*.

Solución:

Partimos de la ley de Kepler para despejar la masa de Sagitario como

$$M = \frac{4\,\pi^2 a^3}{G\,T^2} \tag{8}$$

Convertimos el período a segundos

$$T = 15años = 15 * 365 * 24 * 60 * 60s = 4.8\ 10^8\ s \tag{9}$$

y reemplazamos los valores dados

$$M = \frac{4\,\pi^2 a^3}{G\,T^2} = \frac{4\,\pi^2 (1.3\ 10^{14})^3}{6.6\ 10^{-11}\ (4.8\ 10^8)^2} kg = 5.6\ 10^{36}\ kg \tag{10}$$

Respuesta: La masa de Sagitario A* es aproximadamente

$$M = 5.6\ 10^{36}\ kg \tag{11}$$

es decir, unos 4 millones de masas solares.

1b. Indique cuánto mide el semieje menor b y la distancia al perihelio d en la órbita de S2.

Solución:

La excentricidad es

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{12}$$

donde a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor. Poniendo el valor de la excentricidad dado y el de la longitud del semieje mayor obtenemos el semieje menor como

$$b = \sqrt{a^2(1 - e^2)} = \sqrt{(1.3\ 10^{14})^2(1 - 0.989^2)}\ m = 1.9\ 10^{13}\ m \tag{13}$$

Para el cálculo de la distancia al perihelio usamos la fórmula

$$d \;=\; a\,(1-e) \tag{14}$$

y reemplazamos los valores de a y e dados en el enunciado. Tenemos

$$d \;=\; 1.3\;10^{14}\;(1-0.989)\;m = 1.4\;10^{12}\;m \tag{15}$$

Respuesta:
El semieje menor de la órbita de S2 es:

$$b \;=\; 1.9\;10^{13}\;m \tag{16}$$

La distancia al perihelio es

$$d \;=\; 1.4\;10^{12}\;m \tag{17}$$

1c. Teniendo en cuenta que S2 puede pensarse como un punto cuando se mueve en su órbita, y que no choca con Sagitario A*, dé una cota superior para el radio de Sagitario A*. Es decir, qué valor no puede superar el radio de Sagitario A*?

Nota: Una cota superior para una cantidad f es un valor que es mayor que f.
Solución:

Una cota superior para el radio de Sagitario A* viene dada por la distancia al perihelio. Tomamos $R \;\le\; d \;=\; 1.4\;10^{12}\;m$.

Respuesta:
Una cota al radio de Sagitario A* es

$$R \;\le\; d \;=\; 1.4\;10^{12}\;m \tag{18}$$

Una cota peor es la longitud del semieje menor.

1d. Usando la estimación anterior, calcule la densidad que le correspondería a Sagitario A*.

Solución:

La densidad de Sagitario A* se puede estimar como

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}d^3} = \frac{5.6\;10^{36}}{\frac{4\pi}{3}(1.4\;10^{12})^3}\;\frac{kg}{m^3} = 0.49\;\frac{kg}{m^3} \tag{19}$$

Respuesta:

La densidad de Sagitario A* es

$$\rho = 0.49 \ \frac{kg}{m^3} \tag{20}$$

PARTE 2. O será demasiado tarde??

2a. Dé una expresión para la aceleración gravitatoria a que siente el punto central del cuerpo. Escríbala en términos de la constante de gravitación de Newton G, la masa del agujero negro M y r.

Respuesta:

Según la ley de gravitación de Newton, la aceleración que siente el punto medio del cuerpo, ubicado a una distancia r del centro del agujero negro es

$$a = \frac{G\ M}{r^2} \tag{21}$$

2b. Dé una expresión para la aceleración gravitatoria a_A que siente el punto extremo del cuerpo, más próximo al agujero negro, indicado en la figura como A. Escríbala en términos de la constante de gravitación de Newton G, la masa del agujero negro M, r y L.

Respuesta:

El punto del cuerpo más próximo al agujero está a una distancia $r - \frac{L}{2}$, entonces la aceleración que siente es

$$a_A = \frac{G\ M}{\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} \tag{22}$$

2c. Dé una expresión para la aceleración gravitatoria a_B que siente el punto extremo del cuerpo, que está más lejos al agujero negro, indicado en la figura como B. Escríbala en términos de la constante de gravitación de Newton G, la masa del agujero negro M, r y

L.

Respuesta:

El punto del cuerpo más lejos del agujero está a una distancia $r + \frac{L}{2}$, entonces la aceleración que siente es

$$a_B = \frac{G\ M}{\left(r+\frac{L}{2}\right)^2} \tag{23}$$

2d. Dé una expresión para la aceleración que sienten los puntos A y B con respecto a la que siente el punto medio del mismo. Es decir, escriba

$$a_{0A} = a_A - a \tag{24}$$

$$a_{0B} = a_B - a \tag{25}$$

en términos de G, M, r y L. Estas aceleraciones relativas se llaman aceleraciones de marea.

Respuesta:
Las aceleraciones relativas son:
Para el punto A

$$a_{0A} = a_A - a = \frac{G\ M}{\left(r-\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{G\ M}{r^2} \tag{26}$$

Para el punto B

$$a_{0B} = a_B - a = \frac{G\ M}{\left(r+\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{G\ M}{r^2} \tag{27}$$

2e. Tome el límite en que la longitud del cuerpo es mucho menor que la distancia al centro del agujero negro, $L << r$ para determinar claramente el signo de las aceleraciones de marea. Indique el sentido de cada una con respecto al punto central del cuerpo.
Puede ser útil la expresión

$$\frac{1}{(1 \pm x)^2} \approx 1 \mp 2\ x \tag{28}$$

válida cuando $x << 1$.

Solución:
Las aceleraciones relativas tienen la forma

$$a_{0\pm} = a_{\pm} - a = \frac{G\ M}{\left(r \pm \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{G\ M}{r^2} \qquad (29)$$

donde el signo $+$ corresponde al punto B y el $-$ al punto A. Reescribimos

$$a_{0\pm} = a_{\pm} - a = \frac{G\ M}{r^2}\left(\frac{1}{\left(1 \pm \frac{L}{2r}\right)^2} - 1\right) \qquad (30)$$

Ponemos $x := \frac{L}{2r} << 1$ y usamos el desarrollo que nos dan

$$a_{0\pm} = a_{\pm} - a = \frac{G\ M}{r^2}\left(1 \mp \frac{L}{2r} - 1\right) = \mp \frac{G\ M\ L}{r^3} \qquad (31)$$

Respuesta:
Las aceleraciones relativas se pueden aproximar por

$$a_{0A} = a_A - a = \frac{G\ M\ L}{r^3} \qquad (32)$$

$$a_{0B} = a_B - a = -\frac{G\ M\ L}{r^3} \qquad (33)$$

El signo indica el sentido con respecto a la aceleración que siente el punto medio. Entonces tanto la cabeza como los pies se sienten tirados hacia afuera del cuerpo. Esto es la espaguetización.

2f. Suponiendo que cuando la aceleración de marea es igual a $10\ \frac{N}{kg}$, una persona siente incomodidad, calcule a qué distancia del centro de AN1 y de AN2 ocurre esto. Suponga que la longitud de la persona es $L = 2\ m$.

Solución:

Una aceleración de marea de $10\ \frac{N}{kg}$ corresponde a una distancia al centro del agujero negro dada
por

$$10\ \frac{N}{kg} = \frac{G\ M\ L}{r^3} \tag{34}$$

de donde despejamos la distancia

$$r = \left(\frac{G\ M\ L}{10\ \frac{N}{kg}}\right)^{1/3} \tag{35}$$

Para el AN1 tenemos

$$r_1 = \left(\frac{G\ M_1\ L}{10\ \frac{N}{kg}}\right)^{1/3} = \left(\frac{6.67\ 10^{-12}\ 2\ 10^{39}\ \ 2}{10}\right)^{1/3} m = 3\ 10^9\ m \tag{36}$$

Para el AN2 tenemos

$$r_2 = \left(\frac{G\ M_2\ L}{10\ \frac{N}{kg}}\right)^{1/3} = \left(\frac{6.67\ 10^{-12}\ 2\ 10^{31}\ \ 2}{10}\right)^{1/3} m = 6\ 10^6\ m \tag{37}$$

Respuesta:
La persona sentirá incomodidad a 3 10^6 km o 3 millones de kilómetros del centro del AN1

6 10^3 km o 6 mil kilómetros del centro del AN2.

2g. Sabiendo que si una persona está adentro del horizonte de eventos, ya no puede escapar, diga si cuando la persona siente incomodidad, podrá escapar o es demasiado tarde. Haga esto para los agujeros negros AN1 y AN2.

Solución: Tenemos que comparar las distancias r_1 y r_2 con los radios de los horizontes de eventos R_1 y R_2.
Vemos que $r_1 < R_1$, y $r_2 > R_2$

Respuesta:
Como $r_1 < R_1$, cuando la persona sienta incomodidad, ya estará adentro del agujero AN1 y no podrá salir.
Como $r_2 > R_2$, cuando la persona sienta incomodidad, estará afuera del agujero AN2 y podrá escapar.

PARTE 3. Dilatación del tiempo gravitacional

3a. ¿Quién mide un tiempo más largo? ¿Schroedinger o Einstein?

Solución:

Como el factor $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha\frac{2M}{r}}}$ es mayor que 1, Einstein mide tiempos más largos que Schroedinger.

Respuesta:

Einstein

3b. ¿Qué unidades tiene la constante α que aparece en la fórmula de la dilatación del tiempo (7)?

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha\frac{2M}{r}}}$$

Respuesta:
La dimensión de α es $\frac{m}{kg}$

3c. Suponiendo que la constante α depende sólo de dos de las constantes físicas presentadas al comienzo del problema, sin constantes numéricas adicionales, encuentre α explícitamente en términos de estas constantes.

Si no la puede encontrar, suponga que su valor numérico es 1 en los ítems que siguen.

Respuesta:

$$\alpha = \frac{G}{c^2} \tag{38}$$

3d. Calcule la frecuencia de la radiación de rayos X emitida.

Solución:

La energía y la frecuencia de una onda están relacionadas por

$$E = fh \tag{39}$$

de donde sacamos la frecuencia como

$$f = \frac{E}{h} = \frac{6\ keV}{6.6\ 10^{-34} Js} = \frac{6\ 1.6\ 10^{-16} J}{6.6\ 10^{-34} Js} = 1.45\ 10^{18}\ Hz \tag{40}$$

Respuesta:

La frecuencia de la onda emitida es $1.45\ \ 10^{18}\ Hz$

3e. Indique la frecuencia de los rayos X recibida por un observador muy distante de la estrella y el agujero negro. ¿Hubo un corrimiento al rojo o al azul?

Solución:

La frecuencia está relacionada con el período por

$$f = \frac{1}{T} \tag{41}$$

entonces la frecuencia de la radiación recibida es

$$f_{recibida} = \frac{1}{T_{recibida}} = \frac{\sqrt{1 - \alpha \frac{2\ M}{r}}}{T_{emitida}} = f_{emitida}\ \sqrt{1 - \ \alpha \frac{2\ M}{r}} \tag{42}$$

con $M = 3.3\ M_{sol} = 6.6\ 10^{30}\ kg$ y $r = 20\ km = 20\ 10^3\ m$. Nos da

$$f_{recibida} = 1.45\ 10^{18} \sqrt{1 - \frac{2\ \ G\ M}{c^2 r}}\ \ Hz \tag{43}$$

Respuesta:

La frecuencia de los rayos recibidos es

$$f_{recibida} = 1.0\ 10^{18} \quad Hz \tag{44}$$

como es menor que la emitida decimos que hubo un corrimiento al rojo en frecuencia.

Puntajes Problemas Teóricos

Problema 1

	N1	N2
a-	2	1,5
b-	2	1
c-	2	1,5
d-	2	1
e-	2	1
f-		3
g-		1

Problema 2

	N1	N2
a-	1	0,5
b-	1,5	1
c-	2,5	1,5
d-	1,5	1
e-	2,5	1,5
f-	1	0,5
g-		0,5
h-		0,5
i-		3

PROBLEMA 3			**PROBLEMA 3**	
NIVEL 1			**NIVEL 2**	
1.a)	1		1.a)	1
1.b)	0,5 (0,25+0,25)		1.b)	0,5 (0,25+0,25)
1.c)	1,5 (dar algo si usan a o b)		1.c)	1,5 (dar algo si usan a o b)
1.d)	1		1.d)	1
2.a)	0,5		2.a)	0,5
2.b)	0,5		2.b)	0,5
2.c)	1		2.c)	0,5
2.d)	1		2.d)	0,5
3.a)	1		2.e)	1
3.b)	1		3.a)	0,5
3.c)	1		3.b)	0,5
			3.d)	1
			3.e)	1