

# Olimpiada Iberoamericana de Física



Prueba teórico-experimental

6 de diciembre de 2020

## SOLUCIONES

### Problema 1. Un modelo de catapulta

- a. Por el teorema de ejes paralelos el momento de inercia de para la palanca es:

El momento de inercia para una varilla girando alrededor de eje perpendicular a ella que pasa en por su centro de masa es:

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + M \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{1}{12}M (4L^2 - 4Ll + 4l^2)$$

$$I = \frac{1}{3}M (L^2 - Ll + l^2)$$

Solución alternativa:

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + M \left( \frac{L}{2} - \frac{l}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{M(L+l)^2}{12} + \frac{1}{12}3M [(L+l) - 2l]^2$$

$$I = \frac{1}{12}M [4(L+l)^2 - 12(L+l)l + 12l^2]$$

$$I = \frac{1}{3}M [(L+l)^2 - 3(L+l)l + 3l^2]$$

b. Para el cambio de energía potencial en el sistema.

El ángulo que forma la palanca con el suelo es de  $45^\circ$ . Se cumple que:

$$L = h\sqrt{2}; h = L \text{ sen } 45^\circ$$

La energía potencial inicial es igual: a la energía potencial gravitatoria de la palanca cuando está en el punto más bajo más la energía potencial elástica almacenada en el resorte.

$$U_0 = Mg \left[ \left( \frac{L+l}{2} \right) \text{sen } 45^\circ \right] + \frac{1}{2}k \left[ (L+l) \text{sen } 45^\circ - l_0 - h' \right]^2$$

$$U_0 = Mg \left( \frac{L}{2} \text{sen } 45^\circ + \frac{l}{2} \text{sen } 45^\circ \right) + \frac{1}{2}k (L \text{sen } 45^\circ + l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2$$

$$U_0 = Mg \left( \frac{h}{2} + \frac{l}{2} \text{sen } 45^\circ \right) + \frac{1}{2}k (h + l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2$$

Para la energía potencial final se tiene:

$$U_f = 2mgh + Mg \left[ h + \left( \frac{L-l}{2} \right) \text{sen } 45^\circ \right] + \frac{1}{2}k (h - l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2$$

$$U_f = 2mgh + Mg \left[ h + \frac{l}{2} \text{sen } 45^\circ - \frac{l}{2} \text{sen } 45^\circ \right] + \frac{1}{2}k (h - l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2$$

$$U_f = 2mgh + Mg \left[ h + \frac{h}{2} - \frac{l}{2} \text{sen } 45^\circ \right] + \frac{1}{2}k (h - l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2$$

$$U_f = 2mgh + Mg \left[ \frac{3h}{2} - \frac{l}{2} \text{sen } 45^\circ \right] + \frac{1}{2}k (h - l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2$$

La diferencia de energía en el sistema es:

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg (h - l \text{sen } 45^\circ) + \frac{1}{2}k \left[ (h - l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2 - (h + l \text{sen } 45^\circ - l_0 - h')^2 \right]$$

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg (h - l \text{sen } 45^\circ) + \frac{1}{2}k (-2l \text{sen } 45^\circ) (2h - 2l_0 - 2h')$$

$$U_f - U_0 = 2mgh + Mg (h - l \text{sen } 45^\circ) - 2k (l \text{sen } 45^\circ) (h - l_0 - h')$$

c. Por conservación de energía.

$$\Delta K = -\Delta U$$

Donde

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

El movimiento angular para el objeto y la palanca es igual, se cumple que:

$$\omega = \frac{v}{L}$$

Entonces

$$\Delta K = \frac{1}{2} \left( \frac{mL^2 + I}{L^2} \right) v^2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{mL^2 + I}{L^2} \right) v^2 = 2k (l \text{sen } 45^\circ) (h - l_0 - h') - 2mgh - Mg (h - l \text{sen } 45^\circ)$$

Teniendo así, la velocidad de salida del proyectil

$$v^2 = L^2 \frac{4k(l \text{sen } 45^\circ)(h-l_0-h') - 4mgh - 2Mg(h-l \text{sen } 45^\circ)}{mL^2 + I}$$

$$v = L \sqrt{\frac{4k(l \text{sen } 45^\circ)(h-l_0-h') - 4mgh - 2Mg(h-l \text{sen } 45^\circ)}{mL^2 + I}}$$

d. Para que salga disparado, se debe de cumplir:

$$v > 0$$

Por tanto:

$$4k(l \operatorname{sen} 45^\circ)(h - l_0 - h') - 4mgh - 2Mg(h - l \operatorname{sen} 45^\circ) > 0$$

$$4k(l \operatorname{sen} 45^\circ)(h - l_0 - h') > 4mgh + 2Mg(h - l \operatorname{sen} 45^\circ)$$

$$h - l_0 - h' > \frac{4mgh + 2Mg(h - l \operatorname{sen} 45^\circ)}{4k(l \operatorname{sen} 45^\circ)}$$

$$h' < h - l_0 - \frac{4mgh + 2Mg(h - l \operatorname{sen} 45^\circ)}{4k(l \operatorname{sen} 45^\circ)}$$

e. La altura a la que está el proyectil cuando sale disparado es  $2h$ , y el blanco está a la misma altura, el tiempo de caída es:

$$0 = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{2v_y}{g}$$

Y el alcance  $x$ , es:

$$x = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g}$$

$$x = \frac{v^2 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{g}$$

$$x = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Ya que el proyectil se dispara cuando el ángulo es  $45^\circ$  con la vertical, el proyectil sale con un ángulo de  $45^\circ$  sobre la horizontal.

Tal que:

$$x = \frac{v^2}{g}$$

$$x = \frac{L^2}{g} \left[ \frac{4k(l \operatorname{sen} 45^\circ)(h - l_0 - h') - 4mgh - 2Mg(h - l \operatorname{sen} 45^\circ)}{mL^2 + I} \right]$$

## Problema 2. Gotas eléctricas.

Al caer las gotas cargadas comunican carga a la esfera, la cual va a la superficie exterior de la misma. De esta manera surge un campo eléctrico de intensidad cada vez mayor. Este campo se opone a la aproximación de más gotas.

a) Debemos analizar dos posibles casos. Que la esfera alcance la carga máxima antes de llenarse o que se llene del líquido antes de alcanzar la carga máxima.

I) *La esfera no se alcanza a llenar.* Hallemos la velocidad de las gotas al alcanzar la esfera con ayuda de la ley de la conservación de la energía.

En el momento de desprenderse la gota

$$E_1 = mgh + k \frac{qQ}{h - R}$$

Donde  $m$  es la masa de las gotitas,  $q$  la carga de una esferita y  $Q$  la carga instantánea de la esfera. Al llegar al orificio de la esfera

$$E_2 = mg2R + k \frac{qQ}{R} + \frac{mv^2}{2}$$

A partir de la igualdad  $E_1 = E_2$  despejamos la energía cinética

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - 2R) - kqQ \left( \frac{h - 2R}{(h - R)R} \right) \quad (1)$$

Las gotas dejan de ingresar a la esfera en el momento en que la velocidad de las gotas es igual a cero. De aquí podemos obtener que

$$Q = \frac{mg(h - R)R}{kq} \quad (2)$$

Considerando que

$$\varphi_0 = k \frac{q}{r} \quad \text{y} \quad \varphi = k \frac{Q}{R} \quad (3)$$

Donde  $\varphi$  es el potencial eléctrico de la esfera. El potencial de la esfera va a ser:

$$\varphi = k \frac{mg(h - R)}{\varphi_0 R}. \quad (4)$$

**II) La esfera se llena.** El número máximo de gotitas que caben en la esfera es

$$N = \frac{R^3}{r^3} \quad (5)$$

La carga que adquiere la esfera es

$$Q = qN = \frac{\varphi_0 r}{k} N = \frac{\varphi_0 R^3}{kr^2}. \quad (6)$$

Donde

$$Q = \frac{\varphi R}{k}. \quad (7)$$

El potencial eléctrico máximo en este caso es:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{R^2}{r^2}. \quad (8)$$

**b) Si el líquido es agua,** tendremos que si no se llenara la esfera de (4) tenemos

$$\varphi_1 = \frac{\rho g r^2 (h - R)}{3\epsilon_0 \varphi_0} = 1,2 \times 10^5 \text{ V}$$

Si la esfera se llena de (8) tenemos

$$\varphi_2 = 1,5 \times 10^6 \text{ V} > \varphi_1.$$

Debemos verificar que sí es  $\varphi_1$  el potencial que se establece. De (5) la esfera se llena con

$N_1 = 1,0 \times 10^6$  gotitas. De (3) y (6) se encuentra que

$$N_2 = \frac{Q}{q} = \frac{\varphi R}{\varphi_0 r} = 8,2 \times 10^4 < N_1$$

Que confirma que el potencial que se establece es  $\varphi_1$ .

**c) Con ayuda de la expresión  $E = \frac{\varphi}{r}$ , hallamos que el campo de una gotita es  $E' = 3,0 \times 10^5 \text{ V/m}$  y el campo formado por la esfera es  $E'' = 2,5 \times 10^6 \text{ V/m}$ , por lo que no hay ruptura.**

### Problema 3. El brillo de las estrellas: fotometría fotoeléctrica.

a) La luminosidad máxima de Algol es la suma de las tres luminosidades (cuando ninguna estrella eclipsa a otra):

$$L = 182 + 6,9 + 10 = 198,9 \cdot L_{\text{Sol}} \rightarrow L = 198,9 \cdot 3,828 \cdot 10^{26} = 7,614 \cdot 10^{28} \text{ W}$$

El brillo es la luminosidad dividida por la superficie de la esfera que alcanza la Tierra:

$$B = \frac{L}{4\pi \cdot d^2}, \text{ donde } d \text{ es la distancia de la estrella a la Tierra.}$$

Pasamos la distancia Algol-Tierra de años luz a metros:

$$d = 90 \cdot (3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) = 8,515 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

El brillo de Algol resulta

$$B_{\text{Algol}} = 8,36 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

b) En la curva de luz vemos dos mínimos. El mínimo principal ocurre cuando Algol B pasa por delante de Algol A, y el mínimo secundario cuando pasa justo por detrás. Entonces, el intervalo de tiempo entre los dos mínimos corresponde a la mitad del período orbital.

En la gráfica medimos aproximadamente 34,5 horas. Por tanto, el período es

$$69 \text{ horas} = 2,875 \text{ días}$$

c) De acuerdo a la ley de Wien, la longitud de onda en la que se produce el pico de emisión es inversamente proporcional a la temperatura de la estrella. Utilizando el dato de la constante de Wien del enunciado y las temperaturas de Algol A y Algol B, se obtiene

$$\lambda_{\text{pico}} = \frac{2897,6 \cdot 10^3 \text{ (nm} \cdot \text{K)}}{T \text{ (K)}} = \begin{cases} 222,9 \text{ nm, para Algol A} \\ 643,9 \text{ nm, para Algol B} \end{cases}$$

d) Según la ley de la emisión fotoeléctrica, la frecuencia mínima se obtiene a partir de la energía del fotón,  $h \cdot f$ , y de la función de trabajo del metal (rubidio) iluminado,  $W_0$  (pasando previamente de electronvoltios a julios):

$$h \cdot f = W_0 \rightarrow f_{\text{min}} = \frac{W_0}{h} = \frac{2,261 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ (J} \cdot \text{s)}} = 5,47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

La longitud de onda correspondiente es

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{f} = 548,79 \text{ nm}$$

e) El objetivo del telescopio, de longitud focal  $f' = 4,57$  m y diámetro  $D = 31$  cm, focaliza la luz sobre el cátodo. La difracción producirá una imagen circular (mancha de Airy) de radio

$$\sin \theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{r}{f'} \rightarrow r = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot f' = 1,22 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-9}}{0,31} \cdot 4,57 = 7,194 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Entonces, el diámetro de la imagen de Algol es el doble del radio:

$$2r = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 14,4 \text{ } \mu\text{m}$$

f) Para calcular la corriente eléctrica primero necesitamos conocer el número de fotones que llegan al cátodo. El área del objetivo del telescopio es

$$A = \pi \cdot (D/2)^2 = \pi \cdot (0,31/2)^2 = 0,0755 \text{ m}^2$$

Sabiendo el brillo del apartado a), la energía que entra al telescopio en 1 segundo será

$$E = (B_{\text{Algol}} \cdot t) \cdot A = 8,36 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 0,0755 = 6,309 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Pero la energía de un único fotón para una longitud de onda de 400 nm vale

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} = 4,970 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Por tanto, el número de fotones por segundo que entran al telescopio es

$$N = \frac{E}{E_{\text{fotón}}} = \frac{6,309 \cdot 10^{-10}}{4,970 \cdot 10^{-19}} = 1,27 \cdot 10^9 \text{ fotones por segundo}$$

Como sólo el 10% de la luz es útil (nótese que por encima de la longitud de onda máxima no se produce efecto fotoeléctrico), la eficiencia en el metal es el 2% y todos los electrones arrancados del cátodo llegan al ánodo. Entonces, los electrones que llegan al ánodo son

$$N_e = N \cdot 0,1 \cdot 0,02 = 1,27 \cdot 10^9 \cdot 0,1 \cdot 0,02 = 2,54 \cdot 10^6 \text{ electrones por segundo}$$

La corriente eléctrica que mide el electrómetro será el número de electrones por segundo,  $N_e$ , multiplicado por la carga del electrón:

$$I = N_e \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 2,54 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 4,07 \cdot 10^{-13} \text{ A}$$

g) De lo anterior concluimos que la corriente eléctrica es proporcional al brillo de la estrella:

$$I_1 / I_2 = B_1 / B_2$$

En la curva de luz vemos que la diferencia de magnitud es  $m_1 - m_2 = -1,2$ .

Entonces, de la expresión para la diferencia de magnitudes obtenemos:

$$-1,2 = 2,5 \cdot \log_{10}(B_2 / B_1) \rightarrow B_2 = B_1 / 3$$

Es decir, el brillo disminuye a la tercera parte cuando Algol A es eclipsada por Algol B.

En consecuencia, también la intensidad de corriente eléctrica disminuirá en el mismo factor:

$$I_2 = I_1 / 3$$

### Problema 4. Dinámica de Microtúbulos.

- a) Tiempo para que la molécula se disocie:  $t_3 = 1/d$ . El número de moléculas que se disocian es el número de eventos de despolimerización durante el tiempo que tarda una molécula en adherirse al filamento:  $n_d = t_1/t_3 = d/kC_A$ .
- b) Probabilidad de no tener eventos de unión a moléculas A durante un tiempo  $t_2$  é  $e^{-kC_A t_2}$ . La tasa de probabilidad asociada con este proceso es entonces  $e^{-kC_A t_2}/t_2 = r e^{-n}$ . Entonces, el tiempo característico para perder la tapa es el inverso de este valor:  $t_C = e^n/r$ .
- c) Durante  $t_C$  el número típico de moléculas que se agregan es  $t_C/t_1 = kC_A e^n/r = n e^n$ . Para que la longitud sea constante, este número de moléculas debe ser similar al número de moléculas perdidas en un evento de despolimerización, o sea:  $n e^n = d/kC_A = d/rn$ . Entonces, la ecuación que el número de moléculas en el casquete debe obedecer para que la longitud sea constante es  $n^2 e^n = d/r$ . Sustituyendo (numéricamente) los valores de n, el resultado del número de moléculas en la capa del filamento es  $n = 3,73$ . Entonces  $C_A = 0,58 \mu\text{M}$ .
- d)  $F = (2\gamma/R) 4\pi R^2/N = 26 nN$
- e) Para  $n = 10$  el microtúbulo está en equilibrio, entonces:  $n^2 e^n = d_0(1 + \alpha F)/r$ . Luego:  
 $\alpha = (r n^2 e^n/d_0 - 1)/F = N (r n^2 e^n/d_0 - 1)/(8\pi \gamma R) = 1,4 \times 10^{12}/N = 1,4 \text{ /pN}$ .