

Piedras que rebotan (12 puntos) ¹

Lea la página de instrucciones generales antes de comenzar con este problema.

Introducción

En este problema analizaremos la física de un juego común de niños, en el que se arrojan piedras al agua con una determinada velocidad de rotación, haciendo que las piedras “salten” sobre la superficie del agua, recorriendo una gran distancia hasta hundirse en el agua. En la Parte **A** de este problema presentaremos un modelo simplificado del problema y encontraremos condiciones limitantes para que ocurra el fenómeno. En la Parte **B** consideraremos las disipaciones en nuestro modelo y encontraremos otra condición limitante para que la piedra rebote. Finalmente, en la Parte **C**, analizaremos el movimiento de la piedra, pensando en el número de colisiones y la distancia recorrida por la piedra.

Parte A - Modelo aproximado de las colisiones (3,9 puntos)

Consideremos un modelo simplificado del problema, donde la piedra que lanzamos tiene forma cuadrada, de lado l . La piedra tiene un pequeño espesor mucho menor que l , y su masa es M . También consideraremos que la superficie del lago sobre el que arrojamamos la piedra es perfectamente plana, alineada con el eje horizontal. Además, dos parámetros importantes para el problema son los ángulos: θ que es el ángulo entre la superficie de la piedra y la horizontal, y β que es el ángulo de incidencia entre la velocidad de la piedra y la horizontal, ambos mostrados a continuación en la figura (1).

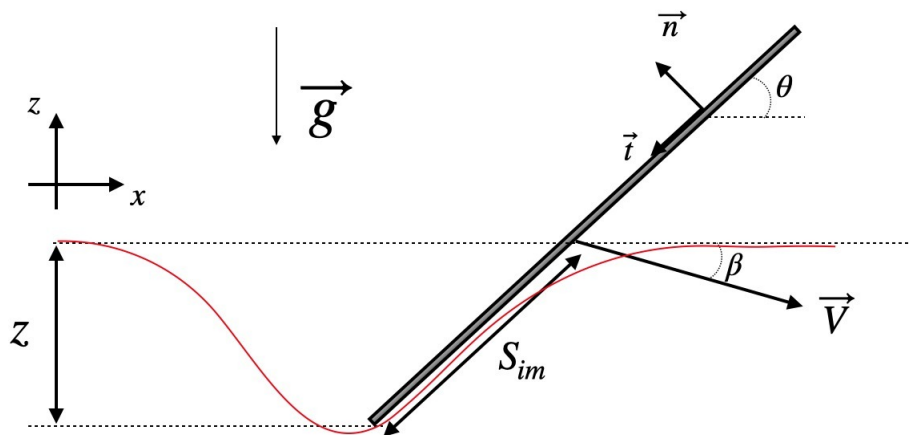


Figura 1: Ilustración que representa la geometría descrita. La línea curva muestra la superficie del agua que se distorsiona por el movimiento de la piedra. También se definen los ángulos y direcciones relevantes del problema. Tenga en cuenta que la cantidad z mide la altura entre el nivel original del agua y el punto más profundo de la piedra.

Para resolver el problema adoptaremos un sistema de coordenadas cartesianas, donde el eje x está alineado con la superficie del agua, y el sentido positivo del eje z apunta hacia arriba, donde $z = 0$ coincide con la superficie de agua. De esta manera, arrojaremos la piedra al agua con el vector de velocidad \vec{V} , con una inclinación β como se muestra arriba.

La clave del problema será analizar la fuerza de reacción del agua sobre la piedra, provocada por el movimiento de ésta en el agua. En este problema consideramos un modelo simplificado para esta fuerza, que aún así, logra obtener varias predicciones para el fenómeno. Consideraremos la siguiente expresión para la fuerza que actúa sobre la piedra, en función de los vectores de módulo unitario, \vec{n} y \vec{t} , en la dirección normal y tangencial de la piedra respectivamente como se muestra en la figura (1)

$$\vec{F} = \frac{1}{2}C_l\rho V^2 S_{im} \vec{n} + \frac{1}{2}C_f\rho V^2 S_{im} \vec{t} \quad (1)$$

¹Autoría de Thomas Bergamaschi

donde, V es la velocidad total de la piedra $V^2 = V_x^2 + V_z^2$, ρ la densidad del agua, C_l y C_f dos coeficientes de la fuerza de contacto con el agua y S_{im} el área de la superficie sumergida, como se muestra en la figura (1).

Tenga en cuenta que generalmente los coeficientes C_l y C_f dependerían de los ángulos β , θ , pero los consideraremos constantes en este problema. Además, considere que β es un ángulo pequeño, de modo que la componente horizontal V_x de la velocidad es mucho mayor que la componente vertical V_z . Este régimen de fuerzas en función de la velocidad es más adecuado para velocidades grandes V y ángulos de incidencia mayores, pero aún podremos obtener predicciones de este modelo.

Para calcular el área de la superficie sumergida S_{im} , considere que la piedra no está girando, de modo que la piedra siempre tiene dos lados alineados con el eje y (entrante al papel). En nuestra aproximación, suponga que el área de S_{im} es tal que el agua mantiene el contacto con la piedra por completo hasta que el agua se vuelve horizontal nuevamente. Dadas estas definiciones, analicemos la dinámica del sistema.

A.1 Escriba una expresión para el área sumergida S_{im} de la piedra em función de z, l, θ . 0,5pt

Dada la expresión anterior para S_{im} , podemos encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema. Para esto, ignore la componente de la fuerza debida a al empuje del agua, que se justifica para piedras suficientemente densas. Sin embargo, no asuma que $V_x \gg V_z$.

A.2 Escriba las aceleraciones vertical y horizontal de la masa, a_x y a_z , respectivamente. 0,5pt

Dadas las ecuaciones de movimiento anteriores, ahora suponga que $V_x \gg V_z$, de modo que podamos extraer el movimiento $z(t)$, y también suponga que la velocidad horizontal de la piedra permanece aproximadamente constante durante todo el movimiento. Recuerde que $z(0) = 0$, y use que la velocidad original a lo largo del eje z es V_z^0 .

A.3 Teniendo en cuenta las aproximaciones descritas anteriormente, encuentre $z(t)$. 1.0pt

Ahora, debemos pensar en una condición limitante para que la piedra ya no pueda salir del agua. Para analizar esto de manera simplificada, asumiremos que si la piedra está completamente sumergida en el agua durante el movimiento, no podrá volver a salir del agua. La justificación de esto se basa en el hecho de que cuando la piedra está completamente sumergida esperamos que la fuerza de flotación que actúa ejerce el agua sobre la piedra disminuya considerablemente, no pudiendo levantar la piedra de nuevo.

A.4 Basado en la discusión anterior, escriba la condición límite para la profundidad máxima z . 0,5pt

A.5 Encuentre la velocidad límite V_{min} para que la piedra rebote sobre el agua. 0,9pt

Con eso, encontramos una condición límite para la velocidad mínima que necesitamos darle a la piedra para que pueda "saltar" una vez en el agua. En la siguiente parte de este problema, analizaremos otra condición límite del problema, relacionada con la disipación de la energía. Sin embargo, antes de eso, este modelo simplificado nos permite encontrar una condición límite para el ángulo θ ya que es natural esperar que si es muy grande no habrá una componente vertical de fuerza lo suficientemente grande como para levantar la piedra.

A.6 Encuentre la región de valores para que la piedra pueda dar un salto en el agua. 0,5pt

Parte B - Disipación de Energía (4,6 puntos)

En la primera parte del problema, analizamos las condiciones limitantes del fenómeno considerando solo el movimiento vertical de la piedra en el agua. Ahora, observe que en el movimiento de la piedra parte de la energía inicial de la piedra se disipa, ya que hay una componente de fuerza en la ecuación (1) que apunta en el eje $-x$, en contra de la dirección del movimiento. Aquí estimaremos cuánta energía se disipa por esta fuerza horizontal F_x durante cada proceso de colisión con el agua, y con esto podremos analizar cuando esta fuerza

hace que la piedra se detenga.

Nuevamente, considere **las mismas aproximaciones que se usaron en la parte A.**

Calcularemos el trabajo disipado, $W < 0$, disipado por F_x . Con esto, obtendremos la velocidad horizontal de la piedra después de la colisión V'_x en función de la velocidad horizontal original V_x .

B.1 Considerando la disipación, escriba la relación entre V'_x, V_x y el trabajo disipado W . 0,5pt

Para obtener W , debemos considerar un conjunto de aproximaciones para el movimiento de la piedra. Supondremos que la piedra permanece a una velocidad aproximadamente constante durante el proceso de colisión con el agua, y que este proceso toma t_{col} tiempo que pronto calcularemos. Además, es conveniente escribir la respuesta como una función de la fuerza promedio en el eje x durante el proceso de colisión $\langle F_x(t) \rangle$.

B.2 Encuentre W en función de V_x , el valor medio de la fuerza en x , $\langle F_x(t) \rangle$, durante la colisión, y el tiempo de colisión, t_{col} . 0,6pt

B.3 Usando los resultados de la parte **A**, escriba una expresión para el tiempo de colisión t_{col} . 0,5pt

B.4 Volviendo a la parte **A**, encuentre una relación entre F_x y F_z , similar a la fuerza de fricción común, de la forma $F_x = \mu F_z$, y encuentre μ como una función de constantes en el sistema. 0,5pt

Según la relación anterior, tenemos que $\langle F_x(t) \rangle = \mu \langle F_z(t) \rangle$, donde $\langle F_z(t) \rangle$ es el valor promedio de la fuerza vertical actuando sobre la masa, que se puede calcular utilizando los resultados de la parte **A**.

B.5 Obtenga $\langle F_z(t) \rangle$ y, por tanto, $\langle F_x(t) \rangle$. 1,0pt

B.6 En base en los elementos anteriores, escriba V'_x como una función de V_x y las constantes básicas del sistema. También, escriba una expresión para la velocidad mínima de la piedra para que pueda rebotar en el agua. 1,0pt

Con eso, obtenemos una condición adicional para que la piedra pueda saltar fuera del agua. Por supuesto, si el lanzamiento de la piedra satisface estas dos condiciones, esperamos que sea posible observar el fenómeno del rebote de la piedra en el agua. Para hacer esto, use la tabla a continuación con los valores de las constantes:

C_l	C_f	ρ	l	g	β	θ	M
1	1	1000 kg/m ³	0.05 m	9.81 m/s ²	10°	10°	0.05 kg

B.7 En base a los valores de las constantes dados anteriormente, calcule la velocidad mínima para que la piedra haga un salto de agua. Nuevamente, usando estas constantes, escriba cuál de las dos condiciones para la velocidad es más limitante que la otra. 0,5pt

Con estos resultados para las velocidades mínimas, en la siguiente parte analizaremos el movimiento de la piedra entre saltos sucesivos.

Parte C - El movimiento de la piedra (3,5 puntos)

En esta parte analizaremos el número total de rebotes realizados por la piedra, y la distancia recorrida entre dos rebotes sucesivos. Para esto, necesitamos la velocidad de la piedra después de la n -ésima colisión.

- C.1** Suponiendo una velocidad inicial de $V_x^{(0)}$, escriba una expresión para $V_x^{(n)}$, la velocidad después de la n -ésima colisión. 1,0pt

Con este resultado, podemos obtener el número total de rebotes que la piedra hace en el agua.

- C.2** Escriba una expresión para el número total de colisiones, N_{col} . 1,0pt

- C.3** Sabiendo que el récord mundial para el número de saltos es $N_{\text{max}} = 88$, y utilizando las constantes dadas en la parte **B**, estime la velocidad inicial $V_x^{(0)}$ en el eje x para obtener este número de saltos. 0,5pt

Entre sucesivos saltos en el agua, la piedra hace una trayectoria por el aire, característica de un lanzamiento oblicuo regular. Con eso podemos calcular la distancia recorrida entre dos saltos sucesivos.

- C.4** Encuentre la distancia recorrida horizontalmente por la piedra entre la n -ésima y $n + 1$ -ésima colisión $\Delta X(n)$, y bosqueje este gráfico. 1,0pt

Este perfil de $\Delta X(n)$ bosquejado es cualitativamente visto al tirar las piedras al lago, ya que en los últimos saltos la piedra pasa a hacer saltos cortos y en rápida sucesión.

Oscilador doble (9 puntos)²

Parte A - Oscilador LC (1 puntos)

Los capacitores e inductores son los elementos básicos de los circuitos osciladores. El circuito considerado genera una oscilación eléctrica que se basa en que la energía eléctrica se almacena a veces en el capacitor, donde se almacena carga eléctrica, y otras veces en el inductor, por lo que se genera un campo magnético en su entorno debido al paso del corriente eléctrica. Considere un capacitor ideal de capacitancia C en serie con un inductor ideal de inductancia L .

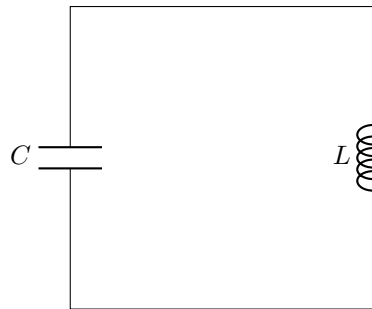


Figura 2: Circuito LC.

Sabiendo que la carga eléctrica almacenada en el capacitor del circuito LC puede ser representada por una función periódica $Q(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, en la cual la frecuencia angular ω puede ser escrita únicamente en término de un producto de potencias de L y C :

A.1 Determine la frecuencia angular ω del oscilador LC.

1,0pt

Parte B - Oscilador doble (4 puntos)

En base al circuito anterior, representamos en la figura siguiente, un oscilador doble, compuesto por un capacitor ideal de capacitancia C , dos llaves, dos inductores ideales de inductancias L_1 y L_2 ($L_2 = 4L_1$) y dos diodos ideales. Los diodos ideales son elementos del circuito que permiten el paso de la corriente eléctrica en un sentido, con resistencia eléctrica nula, pero no en sentido opuesto.

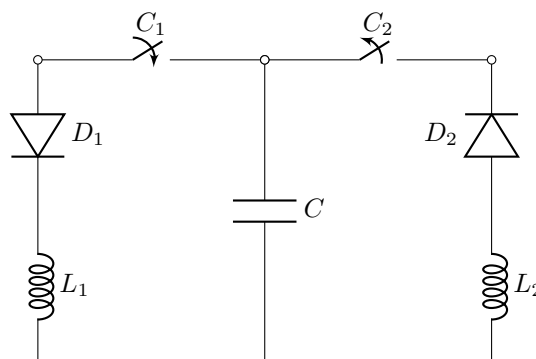


Figura 3: Circuito con oscilador doble.

El oscilador está preparado de tal forma que, en $t = 0$, el capacitor tiene carga inicial $Q_0 > 0$, la llave C_1 está inicialmente cerrada y la llave C_2 se encuentra abierta. De esta manera surge una corriente eléctrica en la malla

²Autoría de Vinícius Névoa

izquierda del circuito. Cuando la corriente se anula, la posición de las llaves se invierte, esto es, C_1 se abre y C_2 se cierra. Pasa a circular corriente en la malla derecha del circuito. Cuando la corriente en la malla derecha se anula, hay un nuevo intercambio de llaves: C_1 se cierra y C_2 se abre. El proceso sigue de esta manera de forma indefinida.

Teniendo en cuenta este nuevo circuito:

B.1 Determine el período de oscilación T de este circuito. Exprese su respuesta en términos de L_1 y C . 1,25pt

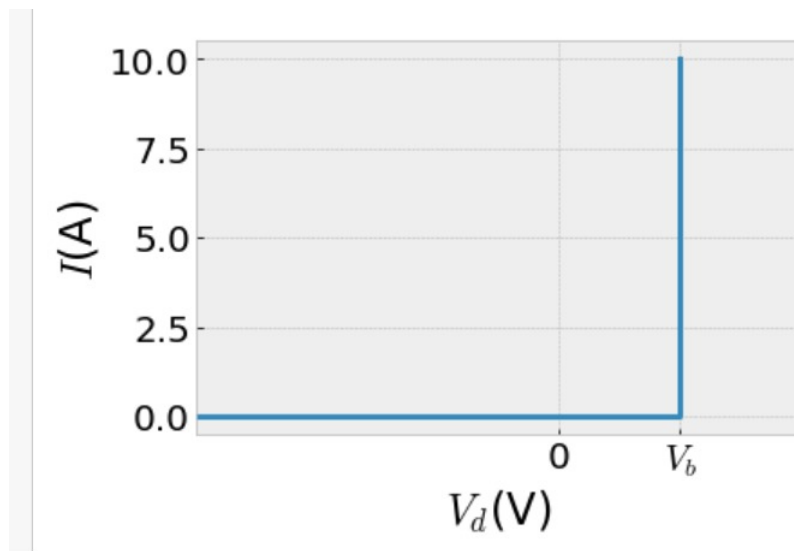
B.2 Bosqueje el gráfico de la carga $Q(t)$ almacenada en el capacitor en función del tiempo, destacando las cantidades relevantes. 1,25pt

B.3 Bosqueje el gráfico de la corriente $I(t)$ que pasa por el inductor en función del tiempo, destacando las cantidades relevantes. Escriba la función correspondiente a este gráfico. 1,25pt

B.4 ¿El circuito descrito presenta algún tipo de pérdida? Si es así, indique en que elemento del circuito ocurre la pérdida. 0,5pt

Un diodo puede ser implementados mediante una unión entre semiconductores del tipo P (ánodo) y del tipo N (cátodo). La polarización se dice directa cuando el polo positivo de la fuente entra en contacto con el ánodo y el polo negativo de la fuente entra en contacto con el cátodo, permitiendo que el diodo conduzca la corriente.

Sin embargo, en dispositivos reales, para que esta corriente eléctrica pueda fluir es necesario polarizar la unión con una diferencia de potencial V_b . Un modelo más refinado de un diodo es, entonces, un dispositivo que permite el pasaje de corriente eléctrica solamente cuando la diferencia de potencial entre sus extremos es superior a V_b . Considere que la resistencia interna del diodo aún pueda ser considerada nula. El gráfico de la corriente eléctrica I que atraviesa este diodo en función del voltaje V entre sus extremos es:



Parte C - Voltaje de polarización de un diodo (4 puntos)

En esta parte del problema, consideraremos el efecto del voltaje de polarización directa de los diodos sobre el oscilador doble presentado. Considere que el voltaje de polarización de los diodos está dado por V_b y su resistencia interna es nula.

C.1 Bosqueje el comportamiento del circuito en una gráfica de carga $Q(t)$ en función del tiempo. Considere la misma condición inicial anterior (carga inicial Q_0 y corriente inicial nula) y un intervalo de tiempo entre 0 y $2T$. Indique el valor final de la carga del capacitor, $Q(2T)$, en la gráfica. 2,0pt

C.2 Suponiendo que $V_b \ll Q_0/C$, estime el tiempo para que la energía total almacenada en el circuito caiga a la mitad. 2,0pt

Detección de muones (9 puntos)³

La radiación cósmica está compuesta por partículas energéticas de origen solar y extragaláctica, esencialmente por protones (87%), partículas alfas (12%) y núcleos de iones pesados ($\approx 1\%$). Cuando los rayos cósmicos llegan a la Tierra, inciden violentamente sobre las moléculas de la atmósfera y generan, entre otros efectos, partículas inestables como los muones.

El muon es una partícula cuya masa es cerca de 200 veces mayor que la del electrón, $m = 105,66 MeV/c^2$ y su tiempo de vida media $T_{1/2} = 2,2 \mu s$. En este problema, investigaremos un poco sobre los aspectos físicos involucrados en su detección en la atmósfera, el suelo y el subsuelo.

Parte A - Detección de muones en el suelo (2,5 puntos)

Los experimentos de muones atmosféricos pueden brindar información sobre la dinámica de la atmósfera. Los investigadores observan variaciones en el flujo de muones en suelo entre diferentes épocas del año. Por ejemplo, en una región determinada, en verano, la atmósfera se expande y la región de mayor producción de muones se desplaza hacia mayores alturas. En consecuencia, se observa en el suelo una disminución de la cantidad de muones de bajas energías al nivel del mar.

En esta primera parte del problema, nos ocuparemos de explicar la detección de muones en el suelo. Suponga que esos muones se producen en una incidencia vertical hacia abajo, que después de su producción no hay interacción con átomos de la atmósfera y que la energía cinética típica de esas partículas es muy alta, de la orden de $K_0 \approx 1,5 \text{ GeV}$.

Recuerde que $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Estime la distancia típica recorrida por los muones durante un tiempo de vida media $T_{1/2}$ medido en el sistema de referencia del muon. | 1,0pt |
|------------|--|-------|

El resultado del apartado anterior sugiere una altura h_0 a partir de la cual se torna improbable que los muones generados sean detectados en suelo. Sin embargo, debido a efectos relativistas buena parte de los muones generados en altas alturas, a kilómetros sobre el nivel del suelo, pueden ser detectados en la superficie de la Tierra.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.2 | Estime la distancia típica que los muones de energía cinética K_0 pueden recorrer en la atmósfera terrestre. | 1,5pt |
|------------|--|-------|

Parte B - Espectro de energía de muones (3,5 puntos)

En observaciones reales no se detectan muones con una única energía cinética, sino una distribución de energías. Considere que un detector mide el flujo de muones ϕ por unidad de área y tiempo, para cuatro diferentes energías cinéticas K , conforme se muestra en el gráfico siguiente. Las medidas son realizadas a 12,5 km de altura.

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.1 | En base a las informaciones dadas, calcule el flujo total y la energía cinética media E_1 de los muones producidos a 12,5 km de altura. | 0,5pt |
|------------|---|-------|

Debido al corto tiempo de vida media de los muones, sus flujos y la energía media varían con la altura.

- | | | |
|------------|--|-------|
| B.2 | Calcule la energía cinética media E_2 de los muones generados a 12,5 km de altura y detectados en suelo. | 3,0pt |
|------------|--|-------|

³Autoría de Maurício Pazianotto

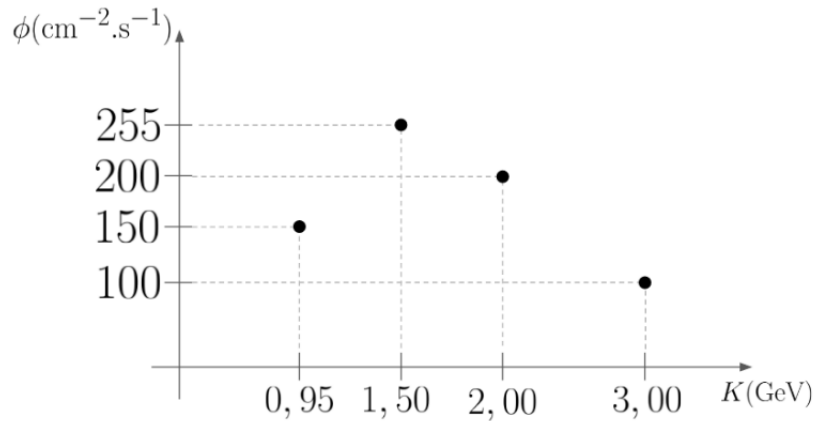


Figura 4: Flujo de muones por unidad de energía medido a 12,5 km de altitud.

Parte C - Aplicaciones y detección en el subsuelo (3 puntos)

Las partículas como los muones, dependiendo de su energía puede tener diferentes aplicaciones. Considere que el tamaño de un enlace atómico es de 10^{-10} m (1 Å), que el tamaño del núcleo de la materia tenga dimensiones del orden de 10^{-15} m (1 fm) y que $\hbar \cdot c = 197,3$ MeV.fm.

C.1 ¿Los muones generados con 0,95 GeV podrían ser usados en estudios de estructura cristalina de materiales o de la estructura nuclear? Justifique su respuesta. 2,0pt

Los muones generados a una altura de 12,5 km que llegan al suelo pueden penetrar el interior de la Tierra hasta una profundidad considerable. En este proceso, el muon pierde su energía por proceso de ionización de forma aproximadamente constante, a razón de $10 \text{ MeV} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^2$ por unidad de área y unidad de masa del suelo. Se sabe que la densidad volumétrica de masa del suelo es de $1,50 \text{ g/cm}^3$.

C.2 Estime la profundidad que estos muones pueden penetrar en el suelo. Desprecie posibles dispersiones. 1,0pt