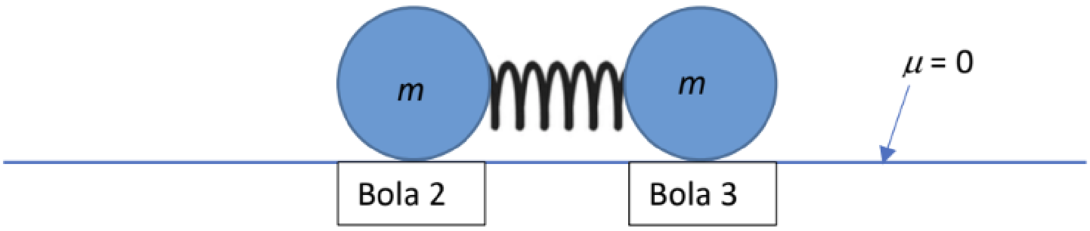
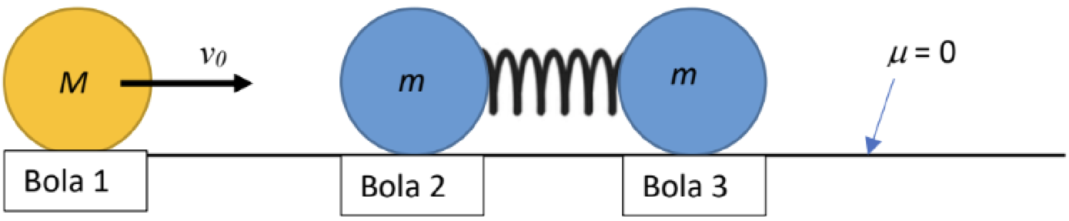
Problema Mecánica

El siguiente sistema está formado por dos bolas esféricas idénticas de masa m. Estas bolas se encuentran unidas por un resorte que posee una constante de fuerza k, el sistema se encuentra completamente en reposo, sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura.



Una tercera bola, llamada Bola 1, de masa M, se traslada sin rotar hacia el sistema de la bola 2 y bola 3 con una rapidez v_0. Colisiona elásticamente de modo directamente frontal con la bola 2. La relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$.



Considere que el tiempo de colisión, llamado τ, será muy pequeño en relación con el período de oscilación T, es decir, debe considerar que $\tau << T$, donde T es el período de oscilación de la bola 2 respecto al centro de masa de las bolas 2 y 3.

a) Encuentre las velocidades finales de la bola 1 y bola 2 inmediatamente después de la colisión. (Puntuación 10%)

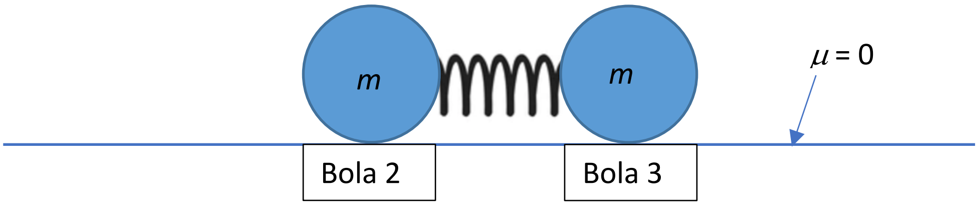
b) Encuentre la posición en función del tiempo $x_{cm}(t)$ del centro de masa de las bolas 2 y 3. (Puntuación 10%)

c) Calcule la amplitud de oscilación del movimiento de la bola 2. (Puntuación 25%).

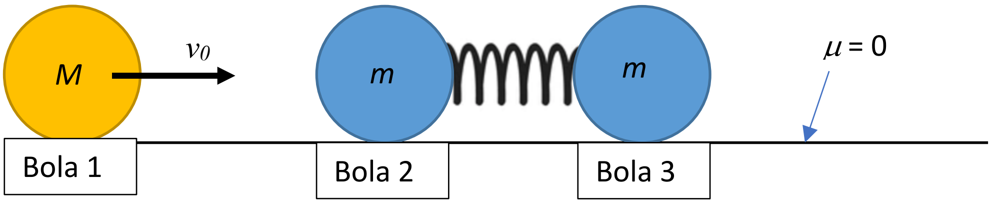
d) Encuentre de forma aproximada (graficamente) la relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$, con la cual la colisión entre la bola 1 y la bola 2 se producirá una sola vez más. (Puntuación 55%).

Problema Mecánica

El siguiente sistema está formado por dos bolas esféricas idénticas de masa m. Estas bolas se encuentran unidas por un resorte que posee una constante de fuerza k, el sistema se encuentra completamente en reposo, sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura.



Una tercera bola, llamada Bola 3, de masa M, se traslada sin rotar hacia el sistema de la bola 2 y bola 3 con una rapidez v_0. Colisiona elásticamente de modo directamente frontal con la bola 2. La relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$.



Considere que el tiempo de colisión, llamado τ, será muy pequeño en relación con el período de oscilación T, es decir, debe considerar que $\tau << T$, donde T es el período de oscilación de la bola 2 respecto al centro de masa de las bolas 2 y 3.

a) Encuentre las velocidades finales de la bola 1 y bola 2 inmediatamente después de la colisión. (Puntuación 10%)

b) Encuentre la posición en función del tiempo $x_{cm}(t)$ del centro de masa de las bolas 2 y 3. (Puntuación 10%)

c) Calcule la amplitud de oscilación del movimiento de la bola 2. (Puntuación 25%).

d) Encuentre de forma aproximada, utilizando el papel milimétrico que se le proporciona, la relación de masas de la bola 1 a la bola 2 es $\gamma = \frac{m}{M}$, con la cual la colisión entre la bola 1 y la bola 2 se producirá una vez más. (Puntuación 55%).

Solución

a) Como el choque es completamente elástico, debe cumplirse las siguientes dos condiciones:

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2 \quad \text{Ec .1} \qquad \qquad \tfrac{1}{2}Mv_0^2 = \tfrac{1}{2}Mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{Ec .2}$$

Trabajando las ecuaciones 1 y 2, se obtiene para las velocidades

$$v_1 = v_0 \frac{M-m}{M+m} = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad \text{Ec .3} \quad \text{Puntuación (5\%)}$$

$$v_2 = v_0 \frac{2M}{M+m} = v_0 \frac{2}{1+\gamma} \quad \text{Ec .4} \quad \text{Puntuación (5\%)}$$

b) Como se tiene la condición $\tau << T$ entonces es posible considerar que la velocidad de la bola 3 es despreciable, $v_3 \approx 0$, de manera que para el centro de masas:

$$x_{cm} = \frac{m\,x_2 + m\,x_3}{2m} \longrightarrow v_{cm} = \frac{v_2}{2} = \frac{x_{cm}}{t}$$

$$x_{cm} = \frac{v_2\,t}{2} = v_0 \ \frac{2}{1+\gamma} \ \frac{t}{2}$$

$$x_{cm} = v_0\,t\,\frac{1}{1+\gamma} \quad \text{Ec .5} \quad \text{Puntuación (10\%)}$$

c) En el sistema de coordenadas del centro de masas, las bolas 2 y 3 se mueven con una ecuación dada por :

$x = A\,Sen\,(\omega\, t)$ Ec .6 Puntuación (3%)

Si la constante de fuerza del resorte es k, respecto al centro de masas será $2\,k$, de modo que para la frecuencia angular ω y un sistema masa resorte, se establece que :

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ Ec .7 Puntuación (7%)

La amplitud se puede encontrar por conservación de la energía justo en el momento que la bola 1 golpea a la bola 2. En este punto el resorte no se ha deformado:

$$K_2 = U_{e\ resorte}$$

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_2^2 = \tfrac{1}{2}\,k^{´}\,A^2 \qquad \text{donde } k^{´} = 2\,k$$

Al sustituír v_2 de la ecuación 4, se obtiene:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2\,v_0}{1+\gamma}\right)^2 = k\,A^2$$

$$\frac{2\,m\,v_o^2}{(1+\gamma)^2} = k\,A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2\,m\,v_o^2}{(1+\gamma)^2 k}} = \frac{\sqrt{2}\,v_o}{(1+\gamma)\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\sqrt{2}\,v_o}{(1+\gamma)\,w}$$

Ec. 8

(puntuación 15%)

d) Las bolas 1 y 2 colisionarán de nuevo si se cumple que sus posiciones son iguales, es decir si:

$$x_1 = x_2$$

Econtrando x_1 :

$$v_1 = \frac{x_1}{t} \longrightarrow x_1 = v_1\, t = v_0\ \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ t$$ Ec. 9. (puntuación 7%)

Econtrando x_2 :

$$x_2 = x_{cm} + x = v_0\, t\left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + A\, Sen(wt)$$

$$x_2 = v_0\, t\left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + \frac{\sqrt{2}\, v_0}{(1+\gamma)w}\ Sen(wt)$$ Ec. 10 . (puntuación 8%)

Ahora retomando

$x_1 = x_2$

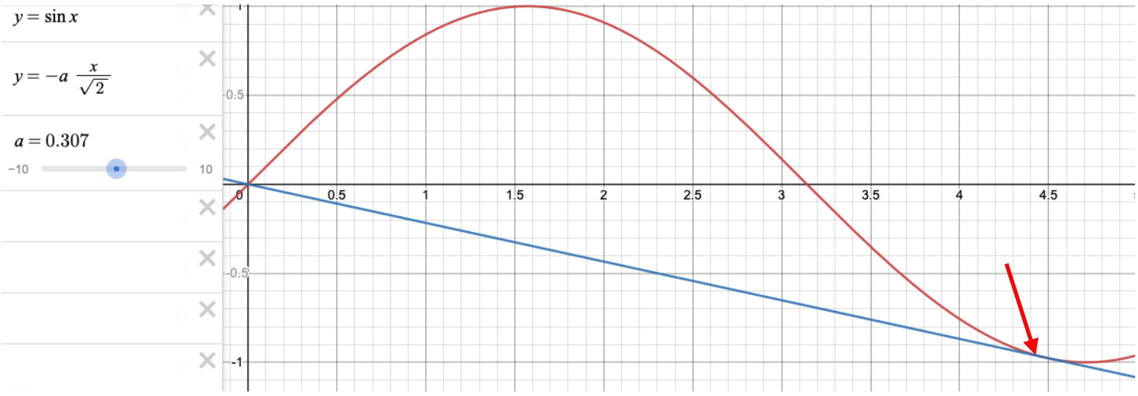
$$v_0\ \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ t = v_0\, t\left(\frac{1}{1+\gamma}\right) + \frac{\sqrt{2}\, v_0}{(1+\gamma)w}\ Sen(wt)$$

$$v_0\ \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ t = \frac{v_0 t}{(1+\gamma)}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{wt}\ Sen(wt)\right]$$

$$-\frac{w\, t\, \gamma}{\sqrt{2}} = Sen\,(wt)$$ Ec. 10 . (puntuación 15%)

La relación de masas γ se puede calcular analizando la ecuación 10, si se encuentra la intersección de la recta. $y = -\frac{w\, t\, \gamma}{\sqrt{2}}$, con la sinusoidal $y = Sen\,(wt)$, para esto utilizaremos el papel milimétrico. Este planteamiento tiene una ponderación de 10%

Para esta solución se trabajó con el software `desmos` encontrando un valor para la relación de masas de : $\gamma \approx 0.31$



puntuación 15%)

Aire descendiendo en la atmósfera

Uno de los patrones globales de la circulación del aire en la atmósfera es el que se conoce como célula de Hadley. En esta célula el aire húmedo asciende en el ecuador alcanzando la parte alta de la atmósfera. Una cantidad de aire se va hacia el norte y otra hacia el sur. El aire pierde humedad y ya seco desciende en latitudes alrededor de los 30º. Al llegar al suelo una parte regresa de nuevo al ecuador cerrando el ciclo de circulación. Este patrón explica en parte la existencia de regiones desérticas en las latitudes mencionadas.

En una región árida como el desierto del Sahara la atmósfera se puede considerar compuesta de aire seco, es decir, sin humedad. En tales condiciones, la temperatura de la atmósfera desciende con la altura a una razón L_a. Considere un paquete o masa de aire contenida en una esfera de radio R, a una temperatura T_0 y que se encuentra a una altura z_0 sobre el suelo, estando en equilibrio térmico con el ambiente. En general el aire no está en reposo, por lo que regularmente tiene un movimiento ascendente o descendente sobre una cierta región. Supongamos que el paquete desciende sin mezclarse y sin intercambiar calor con el ambiente que lo rodea, su temperatura aumenta a una razón L_p.

1. Asumiendo que la masa esférica de aire tiene una temperatura uniforme, encuentre la diferencia de temperatura entre la masa de aire y el ambiente cuando desciende hasta una altura z. Exprese su respuesta en términos de L_a y L_p.
2. Debido a la diferencia de temperatura, la masa de aire irradia calor hasta que alcanza nuevamente el equilibrio térmico con el ambiente. Calcule la cantidad de calor que se debe irradiar para alcanzar el equilibrio térmico, cuando el paquete llega a una altura z. Exprese su respuesta en términos de la densidad del aire ρ (que se considera constante durante el proceso) y el calor específico del aire a presión constante c_p.
3. Calcule cuánto tiempo transcurre para que la masa de aire se enfríe hasta alcanzar el equilibrio térmico. Ayuda: utilice la ley de Stefan-Boltzmann $P = \sigma A T^4$. Adicionalmente, para no complicar la matemática del problema, estaremos asumiendo

que el enfriamiento empieza al llegar a la altura z y ocurre a temperatura constante hasta alcanzar el equilibrio térmico. Para esta pregunta utilice los siguientes datos: $L_a = 7.0$ K/km, $L_p = 10$ K/km, $z_0 = 9.0$ km, z = 0.5 km, $T_0 = -35^{\circ}$ C, R = 400 m, ρ = 1.2 kg/m^3, $c_p = 1005$ J/(kg K), σ = 5.67 × 10−8 W/(m^2 K^4).

4. Cuando los gases de efecto invernadero aumentan su concentración en la atmósfera se propicia lo que llamamos calentamiento global. Esto tiene el efecto de aumentar la altura desde la cual la masa de aire empieza su descenso. Si ahora la altura inicial es $z_0 + h$, de forma que $h = 200$ m, repita el cálculo de la pregunta 3 para esta nueva situación.

Aire descendiendo en la atmósfera

Uno de los patrones globales de la circulación del aire en la atmósfera es el que se conoce como *célula de Hadley*. En esta célula el aire húmedo asciende en el ecuador alcanzando la parte alta de la atmósfera. Una cantidad de aire se va hacia el norte y otra hacia el sur. El aire pierde humedad y ya seco desciende en latitudes alrededor de los 30°. Al llegar al suelo una parte regresa de nuevo al ecuador cerrando el ciclo de circulación. Este patrón explica en parte la existencia de regiones desérticas en las latitudes mencionadas.

En una región árida como el desierto del Sahara la atmósfera se puede considerar compuesta de aire seco, es decir, sin humedad alguna. En tales condiciones, la temperatura de la atmósfera desciende con la altura a una razón L_a. Considere un paquete o masa de aire contenida en una esfera de radio R, a una temperatura T_0 y que se encuentra a una altura z_0 sobre el suelo, estando en equilibrio térmico con el ambiente. Si el paquete desciende sin mezclarse y sin intercambiar calor con el ambiente que lo rodea, este aumenta su temperatura a una razón L_p.

(a) Asumiendo que la masa esférica de aire tiene una temperatura uniforme, encuentre la diferencia de temperatura entre la masa de aire y el ambiente cuando esta ha descendido a una altura z. Exprese su respuesta en términos de L_e y L_p.

(b) Debido a la diferencia de temperatura, la masa de aire irradia calor hasta que alcanza nuevamente el equilibrio térmico con el ambiente. Calcule la cantidad de calor que se debe irradiar para alcanzar el equilibrio térmico cuando el paquete llega a una altura z. Exprese su respuesta en términos de la densidad del aire ρ y el calor específico del aire a presión constante c_p.

(c) Calcule cuánto tiempo tarda la masa de aire enfriarse hasta alcanzar el equilibrio térmico. Ayuda: utilice la ley de Stefan-Boltzmann $P = \sigma A T^4$, asumiendo que el enfriamiento empieza al llegar a la altura z y ocurre a temperatura constante hasta alcanzar el equilibrio térmico. Para esta pregunta utilice los siguientes datos: $L_a = 7.0$ K/km, $L_p = 10$ K/km, $z_0 = 9.0$ km, $z = 0.5$ km, $T_0 = -35°$C, $R = 400$ m, $\rho = 1.2$ kg/m^3, $c_p = 1005$ J/(kg K), $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/(m^2 K^4).

(d) Cuando los gases de efecto invernadero aumentan su concentración en la atmósfera se propicia lo que llamamos calentamiento global. Esto tiene el efecto de aumentar la altura desde la cual la masa de aire empieza su descenso. Si ahora la altura inicial es $z_0 + h$ de forma que $h = 200$ m. Repita el cálculo de la pregunta (c) para esta nueva situación.

Solución

(a) **Valor: 20 %**

El cambio de temperatura en la atmósfera es **(5 %)**

$$\Delta T_a = -L_a \Delta z, \qquad \Longrightarrow \qquad T_a = T_{a0} - L_a(z - z_0).$$

El cambio de temperatura del paquete de aire es **(5 %)**

$$\Delta T_p = -L_p \Delta z, \qquad \Longrightarrow \qquad T_p = T_{p0} - L_p(z - z_0).$$

Si el paquete y el ambiente están en equilibrio térmico a la altura inicial z_0, eso implica que $T_{a0} = T_{p0} = T_0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T_a &= T_0 - L_a(z - z_0), \\ T_p &= T_0 - L_p(z - z_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Restando las ecuaciones obtenemos **(10 %)**

$$\boxed{T_p - T_a = (L_a - L_p)(z - z_0).} \tag{2}$$

(b) **Valor: 30 %**

La cantidad de calor está dada por la capacidad calorífica del aire que se escribe como **(10 %)**

$$\Delta Q = m c_p \Delta T.$$

La diferencia de temperatura está dada por (2). Escribiendo la masa en términos del volumen y la densidad, al sustituir obtenemos **(20 %)**

$$\boxed{\Delta Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_p (L_a - L_p)(z - z_0).} \tag{3}$$

(c) **Valor: 40 %**

La cantidad de calor a irradiar depende de la potencia neta P_N y del tiempo. Es decir, **(10 %)**

$$\Delta Q = P_N \, \Delta t.$$

La cantidad ΔQ está dada por (3). La potencia neta de radiación P_N es lo que emite el paquete de aire menos lo que absorbe del ambiente que lo rodea. Utilizando la ley de Stefan-Botzmann $P = \sigma A T_p^4$, la potencia neta es **(20 %)**

$$P_N = \sigma A (T_p^4 - T_a^4).$$

Despejando el tiempo Δt tenemos **(10 %)**

$$\Delta t = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho c_p (L_a - L_p)(z - z_0)}{\sigma A (T_p^4 - T_a^4)},$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{R\rho c_p (L_a - L_p)(z - z_0)}{3\sigma(T_p^4 - T_a^4)} = 23,701 \text{ s} \approx 6.58 \text{ h},} \tag{4}$$

en donde hemos utilizado el área superficial de la esfera $A = 4\pi R^2$ y las temperaturas dadas por (1).

(d) **10 %**

Repitiendo el cálculo de la fórmula (5) ahora con $z_0 = 9.2$ km, obtenemos

$$\boxed{\Delta t = 21,991 \text{ s} \approx 6.11 \text{ h}} \tag{5}$$

Problema Iceberg Tabular

De toda el agua que hay en la Tierra, únicamente el 2.5% es agua dulce. Casi un 70% del total del agua dulce de la Tierra se encuentra formando glaciares y casquetes de hielo. Los glaciares son grandes masas de hielo que se forman por la acumulación de nieve a lo largo de muchos años (incluso siglos), y se desplazan debido a su peso. Cuando un glaciar alcanza la costa, éste continúa siendo empujado hacia el mar mientras a la vez es arrastrado por las corrientes a lo largo del suelo oceánico. Entonces forma una plataforma de hielo. Cuando llega a un punto en que el océano es lo suficientemente profundo, la plataforma de hielo comienza a flotar y este cambio de dirección genera esfuerzos que finalmente rompen su unión con el glaciar, formando lo que se conoce como un iceberg tabular.

Los icebergs tabulares pueden tener gran tamaño, su superficie superior es relativamente plana y sus bordes laterales son muy empinados (Figura 1). Al igual que cualquier otro tipo de iceberg, la mayor parte del hielo de un iceberg tabular no se encuentra por encima del agua sino debajo de su superficie.

Figura 1: Iceberg tabular (Andrew Shiva / Wikipedia / CC BY-SA 4.0)

En las últimas décadas, el tamaño de las plataformas de hielo ha disminuido considerablemente, y se han observado grandes colapsos, desprendimientos e incluso la desaparición completa de algunas de ellas. Esto ha sido particularmente grave en la Península Antártica, donde el colapso de las plataformas de hielo se relaciona con un incremento dramático de temperatura de ~ 0.5°C por década, durante más de siete décadas debido al calentamiento global. Como consecuencia la superficie de deshielo se incrementa produciendo más fracturas en el hielo, y se produce mayor fusión en la parte inferior debido a que el agua del océano que circula debajo del hielo flotante está más caliente.

Considere un iceberg tabular con forma de un paralelepípedo recto de dimensiones $H \times W \times L$. Asuma que la densidad del hielo es $\rho_h = 0.900 \times 10^3$ kg/m^3 y que la densidad del agua de mar es $\rho_a = 1.027 \times 10^3$ kg/m^3.

1. Si el iceberg tiene la dimensión H en posición vertical, determine qué fracción de H se encuentra debajo de la superficie del agua.

Cuando un iceberg tabular se separa, toma un tiempo que las distintas fuerzas que actúan sobre él se equilibren y es posible que, en ese intervalo, se produzcan torques que harían que el iceberg fuera susceptible de voltearse y caer sobre su lado. Para que el iceberg se voltee, el paso del estado inicial al estado final sea energéticamente favorable. (Ayuda: Para que el iceberg se voltee, sus dimensiones deben ser tales que el cambio de energía entre el estado final e inicial sea tal que no se requiera entregar energía al sistema iceberg-agua desde una fuente externa).

2. Si $L > W$ y $W = \alpha H$ para el iceberg tabular y $0 < \alpha < 1$, considere los casos:

   a) el iceberg tiene inicialmente la dimensión Wen posición vertical y se voltea para tener la dimensión H en posición vertical,
   b) el iceberg tiene inicialmente la dimensión H en posición vertical y se voltea para tener la dimensión Wen posición vertical,

   y encuentre cuál de los dos favorece que el iceberg se voltee. Observación: se espera que la solución del problema se haga por argumentos de energía potencial.

3. Para el caso en que el iceberg se voltea (es decir, cuando esto es energéticamente favorable), encuentre una expresión para la magnitud del cambio total de energía del sistema iceberg-agua y, por inspección de esta ecuación o por medio de su gráfica, encuentre el valor de α para el cual el cambio de energía es máximo.

4. Si el iceberg tiene dimensiones L, $H = 1200$ m y α es la obtenida en el inciso 3, calcule la cantidad de energía que se libera al voltear el iceberg.

5. Si al voltearse el iceberg del inciso 4, éste se sumerge por debajo de su posición de equilibrio una fracción de 0.01 de su dimensión vertical, encuentre el período de oscilación del movimiento del iceberg si se desprecia la resistencia del agua.

Solución problema Iceberg Tabular

Temas evaulados:

- Leyes de Newton
- Energía potencial
- Energía mecánica
- Principio de conservación
- Oscilaciones armónicas
- Teorema de Arquímedes

Problema resuelto

De toda el agua que hay en la Tierra, únicamente el 2.5% es agua dulce. Casi un 70% del total del agua dulce de la Tierra se encuentra formando glaciares y casquetes de hielo. Los glaciares son grandes masas de hielo que se forman por la acumulación de nieve a lo largo de muchos años (incluso siglos), y se desplazan debido a su peso. Cuando un glaciar alcanza la costa, éste continúa siendo empujado hacia el mar mientras a la vez es arrastrado por las corrientes a lo largo del suelo oceánico. Entonces forma una plataforma de hielo. Cuando llega a un punto en que el océano es lo suficientemente profundo, la plataforma de hielo comienza a flotar y este cambio de dirección genera esfuerzos que finalmente rompen su unión con el glaciar, formando lo que se conoce como un iceberg tabular.

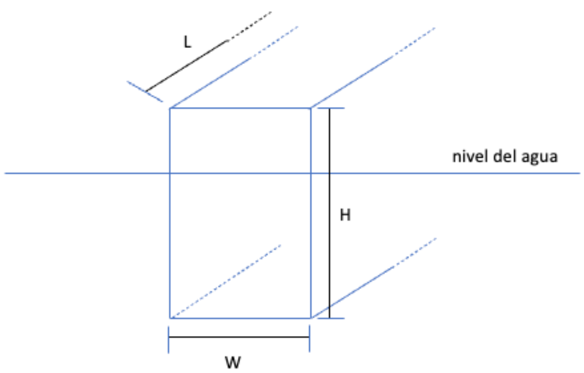
Los icebergs tabulares pueden tener gran tamaño, su superficie superior es relativamente plana y sus bordes laterales son muy empinados (Figura 1). Al igual que cualquier otro tipo de iceberg, la mayor parte del hielo de un iceberg tabular no se encuentra por encima del agua sino debajo de su superficie.

Figura 1: Iceberg tabular (Andrew Shiva / Wikipedia / CC BY-SA 4.0)

En las últimas décadas, el tamaño de las plataformas de hielo ha disminuido considerablemente, y se han observado grandes colapsos, desprendimientos e incluso la desaparición completa de algunas de ellas. Esto ha sido particularmente grave en la Península Antártica, donde el colapso de las plataformas de hielo se relaciona con un incremento dramático de temperatura de $\sim 0.5°\mathrm{C}$ por década, durante más de siete décadas debido al calentamiento global. Como consecuencia la superficie de deshielo se incrementa produciendo más fracturas en el hielo, y se produce mayor fusión en la parte inferior debido a que el agua del océano que circula debajo del hielo flotante está más caliente.

Considere un iceberg tabular con forma de un paralelepípedo recto de altura H, largo L y ancho W. Asuma que la densidad del hielo es $\rho_h = 0.900 \times 10^3$ kg/m^3 y que la densidad del agua de mar es $\rho_a = 1.027 \times 10^3$ kg/m^3.

1. Si el iceberg tiene la dimensión H en posición vertical, determine qué fracción de H se encuentra debajo de la superficie del agua.



$h =$ altura del iceberg que está bajo agua
$F_e = \rho_a V_d g = \rho_a WLh =$ Fuerza de empuje
$F_g = \rho_h WLH =$ Peso del hielo

$$F_e = F_g$$
$$\rho_a WLh = \rho_h WLH$$

$$h = \frac{\rho_h}{\rho_a} H = \frac{0.900 \times 10^3 kg/m^3}{1.027 \times 10^3 kg/m^3} H = 0.876H$$

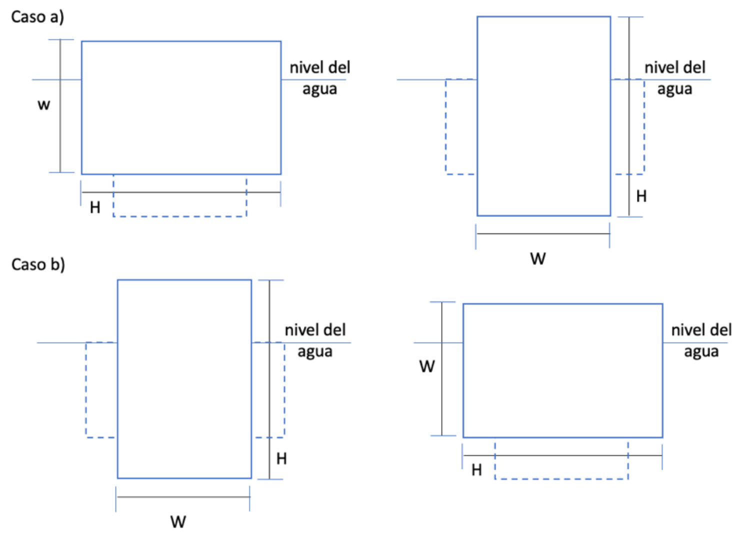
El 87.6% del iceberg se encuentra bajo agua.

Cuando un iceberg tabular se separa, toma un tiempo que las distintas fuerzas que actúan sobre él se equilibren y es posible que, en ese intervalo, se produzcan torques que harían que el iceberg fuera susceptible de voltearse y caer sobre su lado. Para que el iceberg se voltee, el paso del estado inicial al estado final sea energéticamente favorable. (Textos alternativos: Para que el iceberg se voltee, sus dimensiones deben ser tales que el cambio de energía entre el estado final e inicial sea tal que no se requiera entregar energía al sistema iceberg-agua desde una fuente externa. Para que el iceberg se voltee, el intercambio de energía entre el iceberg y el volumen desplazado de agua debe ser suficiente para pasar del estado inicial al estado final). (Sugerencia: compare únicamente el estado inicial y final del iceberg).

2. Si $L > W$ y $W = \alpha H$ para el iceberg tabular y $0 < \alpha < 1$, considere los casos:

   a) el iceberg tiene inicialmente la dimensión W en posición vertical y se voltea para tener la dimensión H en posición vertical,
   b) el iceberg tiene inicialmente la dimensión H en posición vertical y se voltea para tener la dimensión W en posición vertical,

   y encuentre cuál de los dos favorece que el iceberg se voltee.



Las figuras muestran el estado del iceberg antes y después de voltearse para los dos casos a considerar. Las dimensiones en la figura son solo ilustrativas y NO están a escala. En cualquier caso, el centro de gravedad del iceberg se desplaza al pasar de la posición inicial a la posición final: desciende en el caso *a* y asciende en el caso *b*. De la misma manera, el centro de gravedad del volumen de agua desplazado cambia de posición: un volumen de agua desplazado sube en el caso *a* y cae en el caso *b*. La línea punteada muestra los intercambios de posición del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final.

Calcularemos estos centros de gravedad con respecto a la superficie del agua:

Caso a):

La posición del centro de gravedad del iceberg al inicio, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5W-(1-0.876)W=-0.376W$$

La posición del centro de gravedad del iceberg al final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5H+(1-0.876)H=-0.376H$$

El cambio de energía potencial gravitacional del iceberg al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho_h HWLg(-0.376H+0.376W)\\ &= \rho_h \alpha H^2 Lg(-0.376H+0.376\alpha H)\\ &= -0.376\rho_h gLH^3\alpha(1-\alpha)<0\\ &= -(0.376)(0.900\times 10^3 kg/m^3)(9.81m/s^2)LH^3(\alpha-\alpha^2)\\ &= -3319.704\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

El iceberg ha perdido energía potencial gravitacional.

El cambio de posición del centro de gravedad del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5(0.876)W-(-0.5(0.876)H)=-0.438(W-H)=-0.438(\alpha H-H)=0.438H(1-\alpha)$$

El cambio de energía potencial gravitacional del volumen de agua desplazado al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_a &= \rho_a HWLg[0.438H(1-\alpha)]\\ &= 0.438\rho_h LgH^3\alpha(1-\alpha) > 0\\ &= (0.438)(1.027\times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha-\alpha^2)\\ &= 4412.793\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

El agua desplazada ha ganado energía potencial gravitacional.

En este caso, la energía ganada por el agua desplazada es mayor que la energía perdida por el iceberg, lo cual indica que, para que el iceberg que se encuentra inicialmente con la dimensión W en posición vertical, se necesita entregar energía al sistema ya que la energía potencial perdida por el iceberg no es suficiente para elevar el volumen de agua desplazado. El volteo del iceberg en este caso NO es energéticamente favorable.

Caso b):

La posición del centro de gravedad del iceberg al inicio, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5H + (1-0.876)H = -0.376H$$

La posición del centro de gravedad del iceberg al final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5W + (1-0.876)W = -0.376W$$

El cambio de energía potencial gravitacional del iceberg al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho_h HWLg(-0.376W + 0.376H)\\ &= \rho_h\alpha H^2 Lg(-0.376\alpha H + 0.376H)\\ &= 0.376\rho_h gLH^3\alpha(1-\alpha) > 0\\ &= (0.376)(0.900\times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha-\alpha^2)\\ &= 3319.704\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)\end{aligned}$$

El iceberg ha ganado energía potencial gravitacional.

El cambio de posición del centro de gravedad del volumen de agua desplazado entre los estados inicial y final, con respecto de la superficie del agua es:

$$-0.5(0.876)H - (-0.5(0.876)W) = 0.438(W-H) = 0.438(\alpha H - H) = -0.438H(1-\alpha)$$

El cambio de energía potencial gravitacional del volumen de agua desplazado al pasar de su estado inicial a su estado final es:

$$
\begin{aligned}
\Delta E_a &= \rho_a HWLg[-0.438H(1-\alpha)] \\
&= -0.438\rho_h LgH^3\alpha(1-\alpha) < 0 \\
&= (-0.438)(1.027\times 10^3 kg/m^3)(9.81 m/s^2)LH^3(\alpha \\
&\qquad - \alpha^2) \\
&= -4412.793\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)
\end{aligned}
$$

El agua desplazada ha perdido energía potencial gravitacional.

La "caída" del volumen desplazado de agua entre el estado inicial y el estado final proporciona suficiente energía para lograr el incremento de energía potencial del iceberg y deja incluso un sobrante de energía que se transfiere al océano (una buena parte de esta energía crea un tsunami). Entonces, en este caso, el volteo del iceberg es energéticamente favorable.

3. Para el caso en que el iceberg se voltea (es decir, cuando esto es energéticamente favorable), encuentre una expresión para la magnitud del cambio total de energía del sistema iceberg-agua y, por inspección de esta ecuación o por medio de su gráfica, encuentre el valor de α para el cual el cambio de energía es máximo.

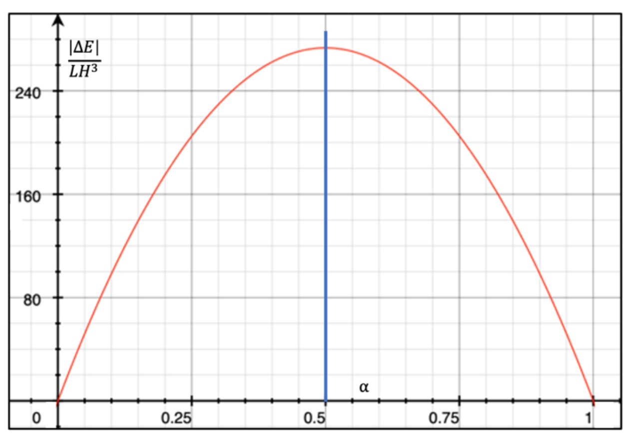
El cambio total de energía en el sistema será

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta E_h + \Delta E_a \\
&= 3319.704\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2) - 4412.793\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2) \\
&= -1093.089\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)
\end{aligned}
$$

La expresión para la magnitud del cambio total de energía será:

$$|\Delta E| = 1093.089\mathrm{LH}^3(\alpha-\alpha^2)$$

La ecuación corresponde a una parábola cuyo vértice (valor máximo) se encuentra cuando $\alpha = 0.5$. (Este resultado pueden también obtenerlo por derivación.



4. Si el iceberg tiene dimensiones $L = 800$ m, $H = 1200$ m y α es la obtenida en el inciso 3, calcule la cantidad de energía que se libera al voltear el iceberg.

$$|\Delta E| = 1093.089\mathrm{LH}^3(\alpha - \alpha^2) = (1093.089)(800m)(1200m)^3(0.5 - 0.5^2)$$
$$= 1.049 \times 10^9 J$$

5. Si al voltearse el iceberg del inciso 4, éste se sumerge por debajo de su posición de equilibrio una fracción de 0.01 de su dimensión vertical final, encuentre el período de oscilación del movimiento del iceberg si se desprecia la resistencia del agua.

El dato de la fracción sumergida es un distractor. No se requiere para la solución. La dimensión vertical final es W.

Sea y la distancia que el iceberg se desplaza por encima de la posición de equilibrio (positiva si se eleva y negativa si se sumerge) y w la fracción de la dimensión vertical sumergida cuando está en su posición de equilibrio ($0.876W$). Por el principio de Arquímedes, sobre el iceberg actúan su peso y el empuje del agua del mar. Si el iceberg está en su posición de equilibrio, estas fuerzas son iguales, $y = 0$ y la fuerza neta es cero:

$$F(y) = \rho_h LHWa_y = \rho_h LHW\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_h LHWg + \rho_a LHwg = 0$$

En cambio, si el iceberg se sumerge por debajo de su posición de equilibrio, la fuerza de empuje será mayor que el peso, por lo que se tendrá una fuerza neta hacia arriba. Si el iceberg se eleva por encima de su posición de equilibrio, el peso será mayor que la fuerza de empuje, produciendo una fuerza hacia abajo.

La fuerza neta será:

$$F(y) = ma_y = \rho_h LWHa_y = \rho_h LWH\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_h LWHg + \rho_a LH(w-y)g$$
$$= -\rho_h LWHg + \rho_a LHwg - \rho_a LHyg$$

Los primeros dos términos corresponden a las fuerzas en la posición de equilibrio (que se compensan) por lo que la fuerza neta será:

$$F(y) = \rho_h LWHa_y = \rho_h LWH\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_a LHgy$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico para el cual la constante k será:

$$k = \rho_a LHg$$

De modo que el período de oscilación estaría dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_h}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_h LHW}{\rho_a LHg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_h W}{\rho_a g}} = 2\pi\sqrt{\frac{w}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.876W}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0.876)(0.5H)}{g}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{(0.876)(600)}{9.81}} = 7.320s$$

Rúbrica:

Inciso	Punteo	
1	15	
2	35	10 por obtener correctamente los cambios de energía del iceberg. 10 por obtener correctamente los cambios de energía del agua desplazada 15 por explicar correctamente por qué el caso b es el energéticamente favorable
3	25	10 por obtener la ecuación correcta 7 por el análisis de la ecuación o elaboración de la gráfica 8 por obtener correctamente el valor de α
4	10	
5	20	5 por plantear la ecuación 5 por identificar correctamente la constante k 5 por plantear la ecuación del período 5 por obtener el valor del período