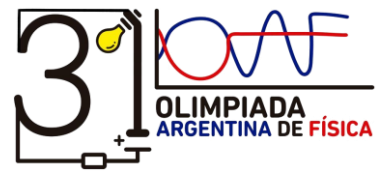


Olimpiada Argentina de Física

Instancia Nacional 2021

Prueba Experimental – NIVEL 1



Reglas a tener en cuenta

Antes de comenzar la prueba:

- No consigne **en ningún sitio de la prueba su nombre, apellido o DNI, de hacerlo: será causal de descalificación.**
- Lea cuidadosamente **TODO** el enunciado de la prueba.

Durante la prueba:

- Sólo puede utilizar las hojas provistas, una lapicera negra o azul, una regla y una calculadora científica no programable. **Escriba únicamente con lapicera**, resaltados o uso de otros colores serán plausibles de descalificación.
- Cualquier **duda o consulta** que quiera realizar la debe hacer **únicamente por escrito al Profesor, en privado, al chat del Aula de la prueba.**
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. **No enumere las hojas del enunciado y no escriba respuestas en ellas pues no serán consideradas.**
- **Escriba de un solo lado de las hojas.**

Al finalizar la prueba:

- Escanee o fotografíe cuidadosa y **únicamente las hojas con sus respuestas** (descarte el enunciado). **Siempre debe estar primero la hoja de respuestas provista.**
- Con las imágenes genere un archivo .pdf. **Nombre el archivo .pdf con su nombre y apellido.**
- Verifique que el archivo .pdf se ve correctamente y que las páginas están en el orden correcto. Entregue el mismo en el Classroom de la Prueba.
- **Cuide el Equipo Experimental**, deberá **entregarlo en la escuela** para formar parte del laboratorio de Física.

Determinación de la resistencia intrínseca en un circuito eléctrico.

Introducción

Un circuito eléctrico es un conjunto de elementos que, conectados entre sí, permiten generar, transportar y utilizar la energía eléctrica con el fin de transformarla en otro tipo de energía. Los elementos que se utilizan para lograr esto son: un generador (por ejemplo, una pila), conductores (por ejemplo, cables) y resistencias eléctricas.

En general, se asume que estos elementos son ideales, pero en la práctica tanto los generadores como los conductores y los elementos de medición (voltímetro, amperímetro, etc.) presentan una resistencia interna que modifica a nuestro circuito de interés.

Por ejemplo, en la **Figura 1** se muestra un circuito formado por una pila en serie con una resistencia (R) y con un voltímetro conectado a la misma. Como se muestra en la **Figura 1**, la pila está formada por una "pila ideal" (ϵ) y una resistencia en serie R_i y el voltímetro está formado por un voltímetro ideal con una resistencia interna ($R_v \sim 10\text{ M}\Omega$). Además, los cables y los puntos de contacto (unión de elementos) también tienen una resistencia intrínseca. Si bien estas resistencias son pequeñas ($\sim 1\ \Omega$) pueden afectar al funcionamiento del circuito, como también a las mediciones que se realicen con el voltímetro.

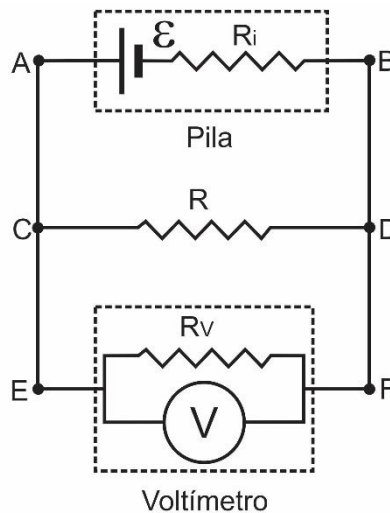


Figura 1. Circuito eléctrico formado por una pila real y una resistencia, conectado a un voltímetro real. Las letras A, B, C, D, E y F indica los puntos de conexión en el circuito.

Objetivo: Determinar la resistencia intrínseca en un circuito eléctrico real.

Materiales provistos:

- Pila con cables de conexión (Ver **Figura 2.a**)
- 2 (dos) cables con ficha cocodrilo-cocodrilo
- Multímetro Digital MAS838 (**Figura 2.b**) o DT830D (**Figura 2.c**)
- 10 Resistencias de distintos valores capaces de disipar una potencia $P = 0.5W$
- 20 hojas blancas
- 2 hojas milimetradas

Materiales que Usted debe proveer

- Elementos de geometría

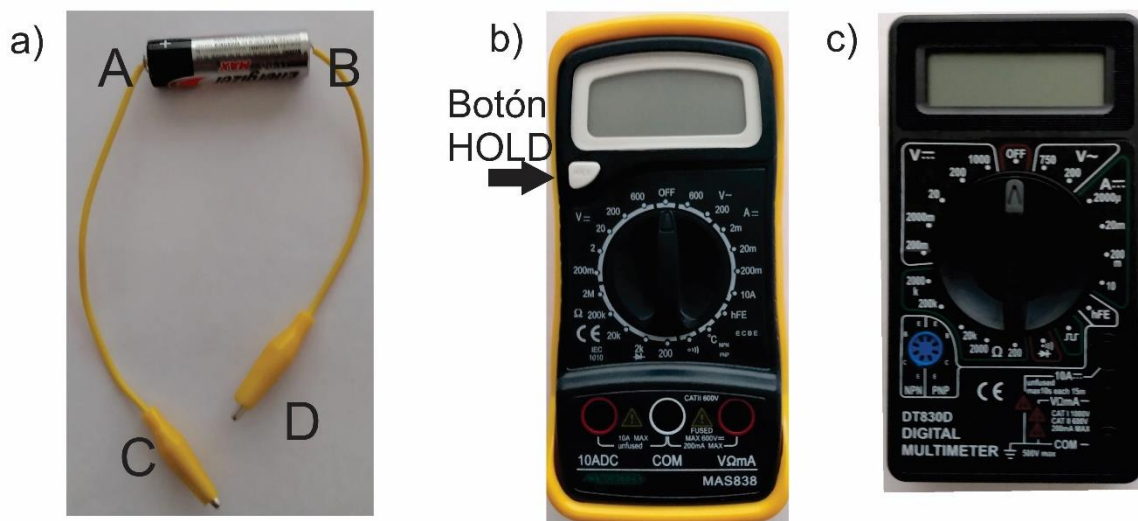


Figura 2. a) Pila con cable de conexión (los colores de los cables pueden diferir). Las letras indican los nodos de acuerdo al circuito de la *Figura 1*, b) Multímetro Digital MAS838 y c) Multímetro Digital DT830D.

Nota: Tenga siempre cuidado que los puntos de conexión C y D (*Figura 2.a*) nunca entren en contacto (cortocircuito).

Nota: En caso que Usted disponga para la experiencia del multímetro digital MAS838 (*Figura 2.b*) verifique que el botón HOLD no está presionado al realizar las mediciones.

Actividades

1. Mida los valores de las resistencias provistas, utilizando al multímetro como óhmetro (Ver *Anexo: Uso del multímetro*). Suponga que el óhmetro es ideal. Para determinar la incertidumbre de los valores de resistencia medidos, utilice la fórmula indicada en el manual de operación del multímetro provisto (Ver *Notas al final de enunciado*).

Nota: Si no utiliza el multímetro, tenga la precaución de apagarlo para no agotar la batería del mismo.

2. Conecte cada una de las resistencias con la pila, de forma de armar el circuito mostrado en la *Figura 1*, y mida la caída de tensión en sus extremos. Haga esto para todas las resistencias provistas. Para ello utilice al multímetro como voltímetro (Ver *Anexo: Uso del multímetro*). Para determinar la incertidumbre de los valores de voltaje medidos, utilice la fórmula indicada en el manual de operación del multímetro provisto (Ver *Notas al final de enunciado*).

Nota: Comience las mediciones con el valor de resistencia provisto más chico. Cuando conecte las resistencias a la pila puede que las mismas se calienten (en particular las resistencias de menor valor). No deje conectadas las resistencias luego de concluir las mediciones.

3. Mida el valor de ε suponiendo que el voltímetro es ideal. Para ello, utilice al multímetro como voltímetro y conecte las puntas del mismo a los bornes de la pila provista.

4. El circuito eléctrico mostrado en la **Figura 1** se puede esquematizar, teniendo en cuenta las resistencias de los cables y puntos de conexión, como el circuito eléctrico mostrado en la **Figura 3**.

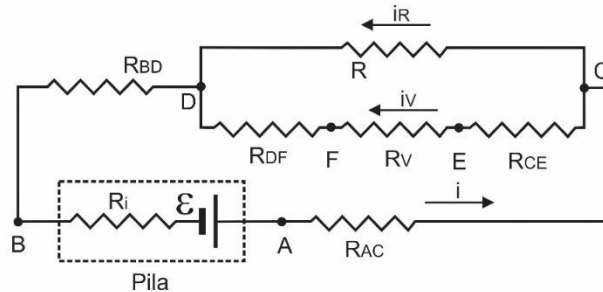


Figura 3. Circuito equivalente al circuito de la **Figura 1** donde se ha representado a las resistencias de los cables y de los contactos por R_{AC} , R_{BD} , R_{CE} y R_{DF} . i , i_R e i_V representan la corriente que entrega la pila y las corrientes que circulan por R y R_V , respectivamente.

Teniendo en cuenta que $R_V \sim 10 \text{ M}\Omega \gg R_j \sim R_i \sim R$ donde R_j representa la resistencia de los cables y de los puntos de contacto.

4.a. Muestre que la resistencia equivalente del circuito es

$$R_{eq} = R^* + R \text{ con } R^* = R_i + R_{AC} + R_{BD}$$

4.b. Muestre que la corriente i_R que circula por la resistencia es igual a la corriente total i entregada por la pila ideal, es decir $i = i_R$.

4.c. Muestre que el voltaje medido por el voltímetro es $V_R = iR$.

4.d. En base a las relaciones encontradas en los puntos anteriores, muestre que el voltaje medido por el voltímetro (V_R) en función de los valores de las resistencias presentes en el circuito y de ε es

$$\varepsilon = \frac{V_R}{R} (R + R^*)$$

5. Dada la relación mostrada en el **punto 4.d.**, se puede definir una variable dependiente (y) y una independiente (x) como,

$$x = \frac{1}{R}$$

$$y = \frac{1}{V_R}$$

Con estas variables definidas, muestre que la ecuación mostrada en el **punto 4.d.** se puede escribir como

$$y = b + mx \quad \text{con} \quad m = \frac{R^*}{\varepsilon} \text{ y } b = \frac{1}{\varepsilon}$$

6. Grafique y en función de x y realice un ajuste lineal. Reporte el valor de la ordenada al origen y de la pendiente obtenida mediante el ajuste.

7. A partir de los valores de la ordenada al origen y de la pendiente obtenida mediante el ajuste, determine el valor de la resistencia intrínseca del circuito y de ε .

Cálculo de incertidumbre

Multímetro Digital MAS838

En el manual del multímetro, la incertidumbre (*Accuracy*) está dada por una expresión de la forma,

$$\pm m\% \text{ of } rdg \pm n \text{ digits}$$

Donde m y n son valores que dependen de la magnitud medida y de la escala utilizada en la medición. rdg hace referencia al valor medido y $digits$ hace referencia a la resolución de la escala utilizada en la medición. Por ejemplo, si para la medición de una resistencia se utilizó la escala $20 \text{ k}\Omega$ y se obtuvo un valor de $10,25 \text{ k}\Omega$. Según el manual del multímetro, para esta escala, la resolución (*Resolution*) es 10Ω y $m = 0,8$ y $n = 2$. Luego, la ecuación resulta

$$\begin{aligned}\Delta R &= \pm 0,8\% \ 10,25 \text{ k}\Omega \pm 2 \times 10\Omega \\ \Delta R &= \pm \frac{0,8 \times 10,25 \text{ k}\Omega}{100} \pm 20 \Omega = 0,082 \text{ k}\Omega + 20 \Omega \\ \Delta R &= 0,082 \text{ k}\Omega + 0,02 \text{ k}\Omega = 0,102 \text{ k}\Omega \\ \Delta R &= 0,1 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

Finalmente, el valor de R medido es

$$R = (10,3 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$$

Multímetro Digital DT830D

En el manual del multímetro, la incertidumbre (*Accuracy*) está dada por una expresión de la forma,

$$\pm (m\% \text{ of } rdg + n D)$$

Donde m y n son valores que dependen de la magnitud medida y de la escala utilizada en la medición. rdg hace referencia al valor medido y D hace referencia a la resolución de la escala utilizada en la medición. Por ejemplo, si para la medición de una resistencia se utilizó la escala $20 \text{ k}\Omega$ y se obtuvo un valor de $10,25 \text{ k}\Omega$. Según el manual del multímetro, para esta escala, la resolución (*Resolution*) es 10Ω y $m = 1,0$ y $n = 4$. Luego, la ecuación resulta

$$\begin{aligned}\Delta R &= \pm (1,0\% \ 10,25 \text{ k}\Omega + 4 \times 10\Omega) \\ \Delta R &= \pm \left(\frac{1,0 \times 10,25 \text{ k}\Omega}{100} + 40 \Omega \right) = (0,1025 \text{ k}\Omega + 40 \Omega) \\ \Delta R &= 0,1025 \text{ k}\Omega + 0,04 \text{ k}\Omega = 0,1425 \text{ k}\Omega \\ \Delta R &= 0,1 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

Finalmente, el valor de R medido es

$$R = (10,3 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$$

Anexo: Uso del multímetro

Un multímetro es un dispositivo que permite medir distintos parámetros eléctricos. En general, los multímetros pueden medir voltaje continuo y alterno, corriente continua y resistencia eléctrica.

En la **Figura 4** se muestra un esquema de un multímetro genérico donde se muestran sus partes principales. Los multímetros poseen una pantalla (display, ①), una perilla selectora (②) y fichas de conexión (③, ④ y ⑤).

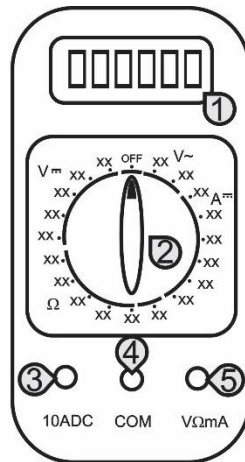


Figura 4. Multímetro genérico donde se indica sus partes principales: ① pantalla, ② perilla selectora y ③, ④ y ⑤ fichas de conexión.

Las partes principales de un multímetro son:

- ① *Pantalla* donde se muestra el valor del parámetro medido por el multímetro,
- ② *Perilla selectora* que permite elegir el parámetro eléctrico que se desea medir (voltaje continuo V^m , voltaje alterno V^{\sim} , corriente continua A^m , resistencia Ω , entre otros) y el fondo de escala del mismo. El fondo de escala (mostrado como xx en la **figura 4**) indica el máximo valor que el multímetro es capaz de medir del parámetro seleccionado en la escala seleccionada.
- ③ *Ficha de conexión (10ADC)* para medir corriente mayor a 200 mA y hasta 10 A (estos valores pueden variar dependiendo del modelo del multímetro, referirse al manual del multímetro). En esta ficha se conecta una de las puntas de prueba en caso que se quiera medir corriente continua en el rango indicado.
- ④ *Ficha de conexión (COM)* común. Esta ficha corresponde a la conexión común para la medición de todos los parámetros eléctricos. En esta ficha siempre se conecta una punta de prueba (por convención la punta de color negro).
- ⑤ *Ficha de conexión (VΩmA)* para medir voltaje alterno y continuo, resistencia y corriente continua hasta 200 mA (Ver manual del multímetro). En esta ficha se conecta una de las puntas de prueba en caso que se quiera medir uno de los parámetros indicados.

Medición de voltaje continuo (V^m).

Se conecta la punta de prueba de color negro en la ficha de conexión indicada por **COM** (ficha de conexión ④ de la **figura 4**) y la punta de prueba de color rojo en la ficha de conexión indicada por **VΩmA** (ficha de conexión ⑤ de la **figura 4**).

Se selecciona, mediante la perilla (② de la **figura 4**), el fondo de escala en el rango correspondiente a **voltaje continuo** del multímetro.

Se conectan las puntas de prueba a los bornes del elemento al cual se quiere medir la caída de tensión y se lee el valor medido por el multímetro en la pantalla del mismo (① de la **figura 4**). En caso que el fondo de escala seleccionada sea menor al valor del voltaje medido, en la pantalla se mostrará 1 . Si el valor mostrado en la pantalla es negativo, esto indica que la punta de prueba conectada en la ficha (④), mide un potencial mayor que la ficha de prueba conectada a (⑤). En este caso, invierta las puntas de conexión en los bornes del elemento que se está midiendo.

Medición de resistencia (Ω).

Se conecta la punta de prueba de color negro en la ficha de conexión indicada por **COM** (ficha de conexión (④) de la **figura 4**) y la punta de prueba de color rojo en la ficha de conexión indicada por **V Ω mA** (ficha de conexión (⑤) de la **figura 4**).

Se selecciona, mediante la perilla ((②) de la **figura 4**), el fondo de escala en el rango correspondiente a **resistencia** del multímetro.

Se conectan las puntas de prueba a los bornes de la resistencia que se quiere medir y se lee el valor medido por el multímetro en la pantalla del mismo (① de la **figura 4**).

En caso que el fondo de escala seleccionada sea menor a la resistencia medida, en la pantalla se mostrará 1 .

Nota: La resistencia se debe medir sin que por ella circule corriente, es decir que la misma **NO** este conectada a ninguna pila o fuente de tensión.

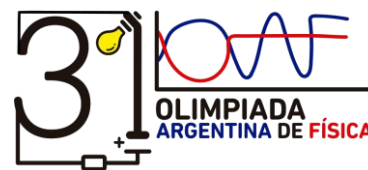
Hoja de Respuestas

		Puntaje
1	Tabla	
2	Tabla	
3	$\varepsilon =$	
4	a.	
	b.	
	c.	
	d.	
5		
6	Gráfico Pendiente: $m =$ Ordenada al origen: $b =$	
7	$\varepsilon =$ $R^* =$	

Olimpiada Argentina de Física

Instancia Nacional 2021

Prueba Experimental – NIVEL 2



Reglas a tener en cuenta

Antes de comenzar la prueba:

- No consigne **en ningún sitio de la prueba su nombre, apellido o DNI, de hacerlo: será causal de descalificación.**
- Lea cuidadosamente **TODO** el enunciado de la prueba.

Durante la prueba:

- Sólo puede utilizar las hojas provistas, una lapicera negra o azul, una regla y una calculadora científica no programable. **Escriba únicamente con lapicera**, resaltados o uso de otros colores serán plausibles de descalificación.
- Cualquier **duda o consulta** que quiera realizar la debe hacer **únicamente por escrito al Profesor, en privado, al chat del Aula de la prueba.**
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. **No enumere las hojas del enunciado y no escriba respuestas en ellas pues no serán consideradas.**
- **Escriba de un solo lado de las hojas.**

Al finalizar la prueba:

- Escanee o fotografíe cuidadosa y **únicamente las hojas con sus respuestas** (descarte el enunciado). **Siempre debe estar primero la hoja de respuestas provista.**
- Con las imágenes genere un archivo .pdf. **Nombre el archivo .pdf con su nombre y apellido.**
- Verifique que el archivo .pdf se ve correctamente y que las páginas están en el orden correcto. Entregue el mismo en el Classroom de la Prueba.
- **Cuide el Equipo Experimental**, deberá **entregarlo en la escuela** para formar parte del laboratorio de Física.

Determinación de la resistencia intrínseca en un circuito eléctrico.

Introducción

Un circuito eléctrico es un conjunto de elementos que, conectados entre sí, permiten generar, transportar y utilizar la energía eléctrica con el fin de transformarla en otro tipo de energía. Los elementos que se utilizan para lograr esto son: un generador (por ejemplo, una pila), conductores (por ejemplo, cables) y resistencias eléctricas.

En general, se asume que estos elementos son ideales, pero en la práctica tanto los generadores como los conductores y los elementos de medición (voltímetro, amperímetro, etc.) presentan una resistencia interna que modifica a nuestro circuito de interés.

Por ejemplo, en la **Figura 1** se muestra un circuito formado por una pila en serie con una resistencia (R) y con un voltímetro conectado a la misma. Como se muestra en la **Figura 1**, la pila está formada por una "pila ideal" (ϵ) y una resistencia en serie R_i y el voltímetro está formado por un voltímetro ideal con una resistencia interna ($R_v \sim 10\text{ M}\Omega$). Además, los cables y los puntos de contacto (unión de elementos) también tienen una resistencia intrínseca. Si bien estas resistencias son pequeñas ($\sim 1\ \Omega$) pueden afectar al funcionamiento del circuito, como también a las mediciones que se realicen con el voltímetro.

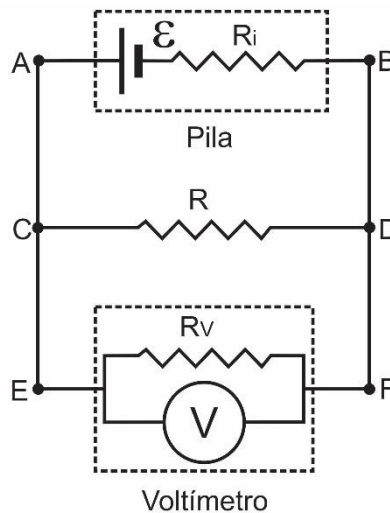


Figura 1. Circuito eléctrico formado por una pila real y una resistencia, conectado a un voltímetro real. Las letras A, B, C, D, E y F indica los puntos de conexión en el circuito.

Objetivo: Determinar la resistencia intrínseca R^* en un circuito eléctrico real.

Materiales provistos:

- Pila con cables de conexión (Ver **Figura 2**)
- 2 (dos) cables con ficha cocodrilo-cocodrilo
- Multímetro Digital MAS838 (**Figura 2.b**) o DT830D (**Figura 2.c**)
- 10 Resistencias de distintos valores capaces de disipar una potencia $P = 0.5W$
- 20 hojas blancas
- 2 hojas milimetradas

Materiales que Usted debe proveer

- Elementos de geometría

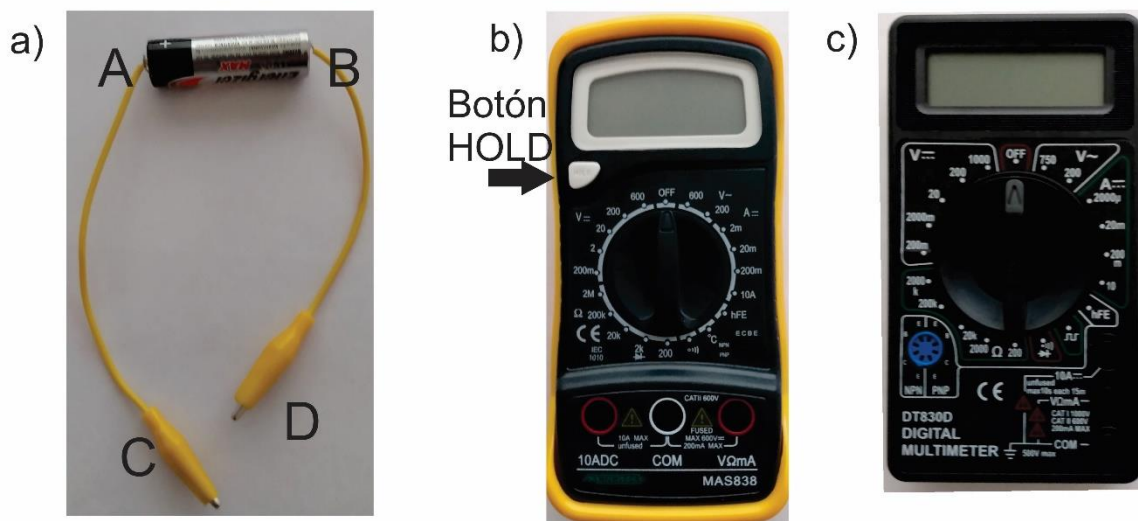


Figura 2. a) Pila con cable de conexión (los colores de los cables pueden diferir). Las letras indican los nodos de acuerdo al circuito de la *Figura 1*, b) Multímetro Digital MAS838 y c) Multímetro Digital DT830D.

Nota: Tenga siempre cuidado que los puntos de conexión C y D (*Figura 2.a*) nunca entren en contacto (cortocircuito).

Nota: En caso que Usted disponga para la experiencia del multímetro digital MAS838 (*Figura 2.b*) verifique que el botón HOLD no está presionado al realizar las mediciones.

Actividades

1. Mida los valores de las resistencias provistas, utilizando al multímetro como óhmetro. Suponga que el óhmetro es ideal. Para determinar la incertidumbre de los valores de resistencia medidos, utilice la fórmula indicada en el manual de operación del multímetro provisto (Ver *Notas al final de enunciado*).

Nota: Si no utiliza el multímetro, tenga la precaución de apagarlo para no agotar la batería del mismo.

2. Conecte cada una de las resistencias con la pila, de forma de armar el circuito mostrado en la *Figura 1*, y mida la caída de tensión en sus extremos. Haga esto para todas las resistencias provistas. Para ello utilice al multímetro como voltímetro (Ver Anexo: *Uso del multímetro*). Para determinar la incertidumbre de los valores de voltaje medidos, utilice la fórmula indicada en el manual de operación del multímetro provisto (Ver *Notas al final de enunciado*).

Nota: Comience las mediciones con el valor de resistencia provisto más chico. Cuando conecte las resistencias a la pila puede que las mismas se calienten (en particular las resistencias de menor valor). No deje conectadas las resistencias luego de concluir las mediciones.

3. Mida el valor de ε suponiendo que el voltímetro es ideal. Analice esta suposición. Para ello:

- 3.a.** Haga un esquema del circuito para medir el valor de ε teniendo en cuenta la resistencia de los cables y de los puntos de conexión.
- 3.b.** Teniendo en cuenta que $R_V \sim 10 M\Omega \gg R_j \sim R_i$ (con R_j la resistencia de los cables y de los puntos de conexión), indique que mide el voltímetro y reporte este valor.
- 4.** Dado el circuito eléctrico mostrado en la **Figura 1**, escriba una expresión para el voltaje medido por el voltímetro (V_R) en función de los valores de las resistencias presentes en el circuito y de ε . Tenga en cuenta la resistencia de los cables y de los puntos de contacto (asuma que cada tramo de cable tiene una resistencia R_j la cual incluye la resistencia del punto de contacto correspondiente). Para ello:
- 4.a.** Escriba una expresión para la resistencia equivalente del circuito teniendo en cuenta que $R_V \sim 10 M\Omega \gg R_j \sim R_i \sim R$.
- 4.b.** Escriba una expresión para la corriente total i entregada por la pila ideal en la relación con las corrientes que circula por las resistencias R_V y R .
- 4.c.** Escriba una expresión que relaciones el voltaje V_R medido por el voltímetro con la resistencia R y la corriente (i_R) que circula por esta.
- 4.d.** En base a las relaciones encontradas en los puntos anteriores, escriba una expresión para el voltaje medido por el voltímetro (V_R) en función de los valores de las resistencias presentes en el circuito y de ε .
- 5.** Dada la relación encontrada en el punto **4.d.**, defina una variable dependiente (y) y una independiente (x) en función de las variables medidas, de manera de obtener una relación lineal entre x e y .
- 6.** Grafique y en función de x y realice un ajuste lineal. Reporte el valor de la ordenada al origen y de la pendiente obtenida mediante el ajuste.
- 7.** A partir de los valores de la ordenada al origen y de la pendiente obtenida mediante el ajuste, determine el valor de la resistencia intrínseca del circuito y de ε .

Cálculo de incertidumbre

Multímetro Digital MAS838

En el manual del multímetro, la incertidumbre (*Accuracy*) está dada por una expresión de la forma,

$$\pm m\% \text{ of } rdg \pm n \text{ digits}$$

Donde m y n son valores que dependen de la magnitud medida y de la escala utilizada en la medición. rdg hace referencia al valor medido y $digits$ hace referencia a la resolución de la escala utilizada en la medición. Por ejemplo, si para la medición de una resistencia se utilizó la escala $20 \text{ k}\Omega$ y se obtuvo un valor de $10,25 \text{ k}\Omega$. Según el manual del multímetro, para esta escala, la resolución (*Resolution*) es 10Ω y $m = 0,8$ y $n = 2$. Luego, la ecuación resulta

$$\begin{aligned}\Delta R &= \pm 0,8\% \ 10,25 \text{ k}\Omega \pm 2 \times 10\Omega \\ \Delta R &= \pm \frac{0,8 \times 10,25 \text{ k}\Omega}{100} \pm 20 \Omega = 0,082 \text{ k}\Omega + 20 \Omega \\ \Delta R &= 0,082 \text{ k}\Omega + 0,02 \text{ k}\Omega = 0,102 \text{ k}\Omega \\ \Delta R &= 0,1 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

Finalmente, el valor de R medido es

$$R = (10,3 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$$

Multímetro Digital DT830D

En el manual del multímetro, la incertidumbre (*Accuracy*) está dada por una expresión de la forma,

$$\pm (m\% \text{ of } rdg + n D)$$

Donde m y n son valores que dependen de la magnitud medida y de la escala utilizada en la medición. rdg hace referencia al valor medido y D hace referencia a la resolución de la escala utilizada en la medición. Por ejemplo, si para la medición de una resistencia se utilizó la escala $20 \text{ k}\Omega$ y se obtuvo un valor de $10,25 \text{ k}\Omega$. Según el manual del multímetro, para esta escala, la resolución (*Resolution*) es 10Ω y $m = 1,0$ y $n = 4$. Luego, la ecuación resulta

$$\begin{aligned}\Delta R &= \pm (1,0\% \ 10,25 \text{ k}\Omega + 4 \times 10\Omega) \\ \Delta R &= \pm \left(\frac{1,0 \times 10,25 \text{ k}\Omega}{100} + 40 \Omega \right) = (0,1025 \text{ k}\Omega + 40 \Omega) \\ \Delta R &= 0,1025 \text{ k}\Omega + 0,04 \text{ k}\Omega = 0,1425 \text{ k}\Omega \\ \Delta R &= 0,1 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

Finalmente, el valor de R medido es

$$R = (10,3 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$$

Anexo: Uso de multímetro

Un multímetro es un dispositivo que permite medir distintos parámetros eléctricos. En general, los multímetros pueden medir voltaje continuo y alterno, corriente continua y resistencia eléctrica.

En la **Figura 3** se muestra un esquema de un multímetro genérico donde se muestran sus partes principales. Los multímetros poseen una pantalla (display, ①), una perilla selectora (②) y fichas de conexión (③, ④ y ⑤).

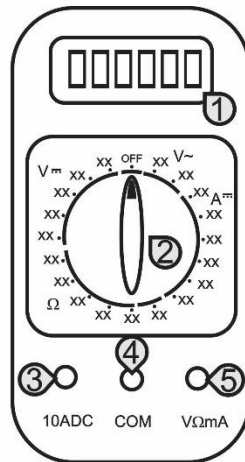


Figura 3. Multímetro genérico donde se indica sus partes principales: ① pantalla, ② perilla selectora y ③, ④ y ⑤ fichas de conexión.

Las partes principales de un multímetro son:

- ① *Pantalla* donde se muestra el valor del parámetro medido por el multímetro,
- ② *Perilla selectora* que permite elegir el parámetro eléctrico que se desea medir (voltaje continuo V^m , voltaje alterno V^{\sim} , corriente continua A^m , resistencia Ω , entre otros) y el fondo de escala del mismo. El fondo de escala (mostrado como xx en la **figura 3**) indica el máximo valor que el multímetro es capaz de medir del parámetro seleccionado en la escala seleccionada.
- ③ *Ficha de conexión (10ADC)* para medir corriente mayor a 200 mA y hasta 10 A (estos valores pueden variar dependiendo del modelo del multímetro, referirse al manual del multímetro). En esta ficha se conecta una de las puntas de prueba en caso que se quiera medir corriente continua en el rango indicado.
- ④ *Ficha de conexión (COM)* común. Esta ficha corresponde a la conexión común para la medición de todos los parámetros eléctricos. En esta ficha siempre se conecta una punta de prueba (por convención la punta de color negro).
- ⑤ *Ficha de conexión (VΩmA)* para medir voltaje alterno y continuo, resistencia y corriente continua hasta 200 mA (Ver manual del multímetro). En esta ficha se conecta una de las puntas de prueba en caso que se quiera medir uno de los parámetros indicados.

Medición de voltaje continuo (V^m).

Se conecta la punta de prueba de color negro en la ficha de conexión indicada por **COM** (ficha de conexión ④ de la **figura 3**) y la punta de prueba de color rojo en la ficha de conexión indicada por **VΩmA** (ficha de conexión ⑤ de la **figura 3**).

Se selecciona, mediante la perilla (② de la **figura 3**), el fondo de escala en el rango correspondiente a **voltaje continuo** del multímetro.

Se conectan las puntas de prueba a los bornes del elemento al cual se quiere medir la caída de tensión y se lee el valor medido por el multímetro en la pantalla del mismo (① de la **figura 3**). En caso que el fondo de escala seleccionada sea menor al valor del voltaje medido, en la pantalla se mostrará 1 . . Si el valor mostrado en la pantalla es negativo, esto indica que la punta de prueba conectada en la ficha (④), mide un potencial mayor que la ficha de prueba conectada a (⑤). En este caso, invierta las puntas de conexión en los bornes del elemento que se está midiendo.

Medición de resistencia (Ω).

Se conecta la punta de prueba de color negro en la ficha de conexión indicada por **COM** (ficha de conexión (④) de la **figura 3**) y la punta de prueba de color rojo en la ficha de conexión indicada por **V Ω mA** (ficha de conexión (⑤) de la **figura 3**).

Se selecciona, mediante la perilla ((②) de la **figura 3**), el fondo de escala en el rango correspondiente a **resistencia** del multímetro.

Se conectan las puntas de prueba a los bornes de la resistencia que se quiere medir y se lee el valor medido por el multímetro en la pantalla del mismo (① de la **figura 3**).

En caso que el fondo de escala seleccionada sea menor a la resistencia medida, en la pantalla se mostrará 1 .

Nota: La resistencia se debe medir sin que por ella circule corriente, es decir que la misma **NO** este conectada a ninguna pila o fuente de tensión.

Hoja de Respuestas

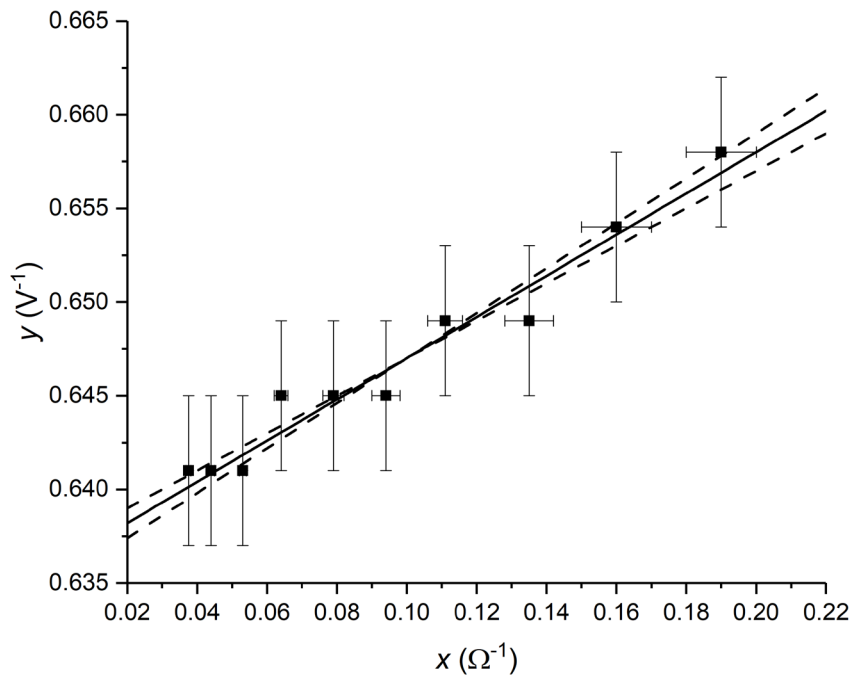
		Puntaje
1	Tabla	
2	Tabla	
3	a.	
	b. $V_V =$ $\varepsilon =$	
4	a. $R_{eq} =$	
	b. $i =$	
	c. $V_R =$	
	d.	
5	$x =$ $y =$	

6	Gráfico Pendiente: $m =$ Ordenada al origen: $b =$	
7	$\varepsilon =$ $R^* =$	

Nivel 1

Hoja de Repuestas

		Puntaje									
1	a. Ver solución	0,25									
	b. Ver solución	0,25									
	c. Ver solución	0,25									
	d. Ver solución	0,25									
2	Tabla I: Valores medidos de R y V_R con su respectiva incertidumbre.									5	
	R [Ω](200 Ω)	V_R [V] (2V)	R [Ω]	ΔR [Ω]	V_R [V]	ΔV_R [V]	x [Ω^{-1}]	Δx [Ω^{-1}]	y [V^{-1}]		Δy [V^{-1}]
	5,3	1,524	5,3	0,3	1,52	0,01	0,19	0,01	0,658		0,004
	6,2	1,527	6,2	0,4	1,53	0,01	0,16	0,01	0,654		0,004
	7,4	1,536	7,4	0,4	1,54	0,01	0,135	0,007	0,649		0,004
	9,0	1,541	9,0	0,4	1,54	0,01	0,111	0,005	0,649		0,004
	10,6	1,546	10,6	0,4	1,55	0,01	0,094	0,004	0,645		0,004
	12,6	1,549	12,6	0,4	1,55	0,01	0,079	0,003	0,645		0,004
	15,6	1,554	15,6	0,4	1,55	0,01	0,064	0,002	0,645		0,004
	18,8	1,557	18,8	0,5	1,56	0,01	0,053	0,001	0,641		0,004
22,6	1,560	22,6	0,5	1,56	0,01	0,044	0,001	0,641	0,004		
26,7	1,563	26,7	0,5	1,56	0,01	0,0375	0,0007	0,641	0,004		
3	Ver Tabla I.	5									
4	$\varepsilon = (1,58 \pm 0,01) V$	0,5									
5	Ver solución	0,5									



6

6

Pendiente: $m = (0,636 \pm 0,001)A^{-1}$

Ordenada al origen $b = (0,11 \pm 0,01)V^{-1}$

7

$$\varepsilon = \frac{1}{b} = (1,572 \pm 0,003) V$$

$$R^* = \frac{m}{b} = (0,17 \pm 0,02)\Omega$$

2

Nivel 2

Hoja de Repuestas

		Puntaje																																																																																																															
1	a.	0,5																																																																																																															
	$R_{eq} = R^* + R$ con $R^* = R_i + R_{AC} + R_{BD}$																																																																																																																
	b.	0,5																																																																																																															
	$i = i_R$																																																																																																																
1	c.	0,5																																																																																																															
	$V_R = i_R R = iR$																																																																																																																
1	d.	1,0																																																																																																															
	$\varepsilon = \frac{V_R}{R} (R + R^*)$																																																																																																																
2	Tabla I: Valores medidos de R y V_R con su respectiva incertidumbre.																																																																																																																
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R [Ω](200Ω)</th> <th>V_R [V] (2V)</th> <th>R [Ω]</th> <th>ΔR [Ω]</th> <th>V_R [V]</th> <th>ΔV_R [V]</th> <th>x [Ω^{-1}]</th> <th>Δx [Ω^{-1}]</th> <th>y [V^{-1}]</th> <th>Δy [V^{-1}]</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5,3</td><td>1,524</td><td>5,3</td><td>0,3</td><td>1,52</td><td>0,01</td><td>0,19</td><td>0,01</td><td>0,658</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>6,2</td><td>1,527</td><td>6,2</td><td>0,4</td><td>1,53</td><td>0,01</td><td>0,16</td><td>0,01</td><td>0,654</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>7,4</td><td>1,536</td><td>7,4</td><td>0,4</td><td>1,54</td><td>0,01</td><td>0,135</td><td>0,007</td><td>0,649</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>9,0</td><td>1,541</td><td>9,0</td><td>0,4</td><td>1,54</td><td>0,01</td><td>0,111</td><td>0,005</td><td>0,649</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>10,6</td><td>1,546</td><td>10,6</td><td>0,4</td><td>1,55</td><td>0,01</td><td>0,094</td><td>0,004</td><td>0,645</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>12,6</td><td>1,549</td><td>12,6</td><td>0,4</td><td>1,55</td><td>0,01</td><td>0,079</td><td>0,003</td><td>0,645</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>15,6</td><td>1,554</td><td>15,6</td><td>0,4</td><td>1,55</td><td>0,01</td><td>0,064</td><td>0,002</td><td>0,645</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>18,8</td><td>1,557</td><td>18,8</td><td>0,5</td><td>1,56</td><td>0,01</td><td>0,053</td><td>0,001</td><td>0,641</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>22,6</td><td>1,560</td><td>22,6</td><td>0,5</td><td>1,56</td><td>0,01</td><td>0,044</td><td>0,001</td><td>0,641</td><td>0,004</td></tr> <tr><td>26,7</td><td>1,563</td><td>26,7</td><td>0,5</td><td>1,56</td><td>0,01</td><td>0,0375</td><td>0,0007</td><td>0,641</td><td>0,004</td></tr> </tbody> </table>		R [Ω](200 Ω)	V_R [V] (2V)	R [Ω]	ΔR [Ω]	V_R [V]	ΔV_R [V]	x [Ω^{-1}]	Δx [Ω^{-1}]	y [V^{-1}]	Δy [V^{-1}]	5,3	1,524	5,3	0,3	1,52	0,01	0,19	0,01	0,658	0,004	6,2	1,527	6,2	0,4	1,53	0,01	0,16	0,01	0,654	0,004	7,4	1,536	7,4	0,4	1,54	0,01	0,135	0,007	0,649	0,004	9,0	1,541	9,0	0,4	1,54	0,01	0,111	0,005	0,649	0,004	10,6	1,546	10,6	0,4	1,55	0,01	0,094	0,004	0,645	0,004	12,6	1,549	12,6	0,4	1,55	0,01	0,079	0,003	0,645	0,004	15,6	1,554	15,6	0,4	1,55	0,01	0,064	0,002	0,645	0,004	18,8	1,557	18,8	0,5	1,56	0,01	0,053	0,001	0,641	0,004	22,6	1,560	22,6	0,5	1,56	0,01	0,044	0,001	0,641	0,004	26,7	1,563	26,7	0,5	1,56	0,01	0,0375	0,0007	0,641	0,004	4
	R [Ω](200 Ω)	V_R [V] (2V)	R [Ω]	ΔR [Ω]	V_R [V]	ΔV_R [V]	x [Ω^{-1}]	Δx [Ω^{-1}]	y [V^{-1}]	Δy [V^{-1}]																																																																																																							
	5,3	1,524	5,3	0,3	1,52	0,01	0,19	0,01	0,658	0,004																																																																																																							
	6,2	1,527	6,2	0,4	1,53	0,01	0,16	0,01	0,654	0,004																																																																																																							
	7,4	1,536	7,4	0,4	1,54	0,01	0,135	0,007	0,649	0,004																																																																																																							
	9,0	1,541	9,0	0,4	1,54	0,01	0,111	0,005	0,649	0,004																																																																																																							
	10,6	1,546	10,6	0,4	1,55	0,01	0,094	0,004	0,645	0,004																																																																																																							
	12,6	1,549	12,6	0,4	1,55	0,01	0,079	0,003	0,645	0,004																																																																																																							
	15,6	1,554	15,6	0,4	1,55	0,01	0,064	0,002	0,645	0,004																																																																																																							
18,8	1,557	18,8	0,5	1,56	0,01	0,053	0,001	0,641	0,004																																																																																																								
22,6	1,560	22,6	0,5	1,56	0,01	0,044	0,001	0,641	0,004																																																																																																								
26,7	1,563	26,7	0,5	1,56	0,01	0,0375	0,0007	0,641	0,004																																																																																																								
3	Ver Tabla I	4																																																																																																															
4	a.	0,5																																																																																																															
4	b.	1																																																																																																															
	$V_V = \varepsilon$ $\varepsilon = (1,58 \pm 0,01) V$																																																																																																																

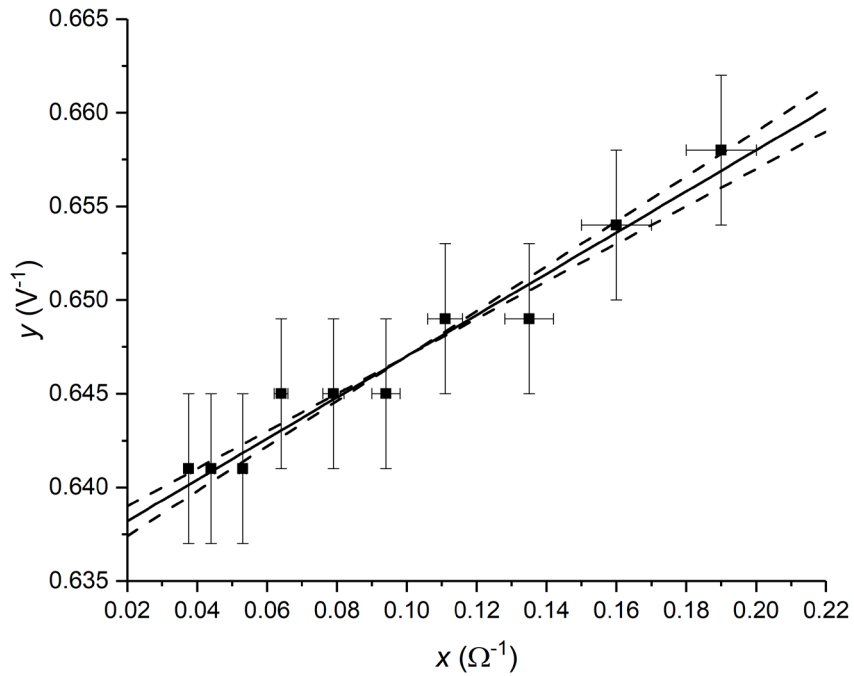
5

$$x = \frac{1}{R}$$

$$y = \frac{1}{V_R}$$

1

6



5

Pendiente: $m = (0,636 \pm 0,001)A^{-1}$

Ordenada al origen $b = (0,11 \pm 0,01)V^{-1}$

7

$$\varepsilon = \frac{1}{b} = (1,572 \pm 0,003) V$$

$$R^* = \frac{m}{b} = (0,17 \pm 0,02)\Omega$$

2

Solución

1.a.

El circuito de la figura 1 puede ser representado por el circuito mostrado en la figura s1 donde R_{AC} , R_{BD} , R_{CE} y R_{DF} representa la resistencia de los cables y de contacto en los nodos respectivos (por ejemplo, R_{AC} representa la resistencia del cable entre los nodos AC y la resistencia de contacto del nodo A y del nodo C).

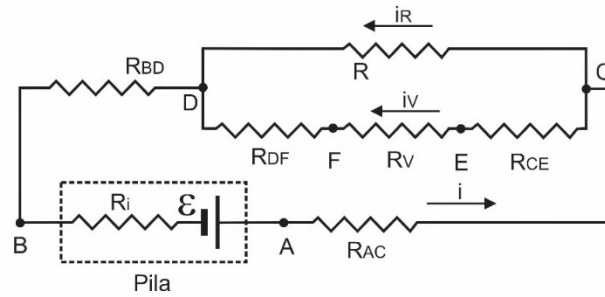


Figura s1. Circuito equivalente al circuito de la figura 1 donde se ha representado a las resistencias de los cables y de los contactos por R_{AC} , R_{BD} , R_{CE} y R_{DF} . i , i_R e i_V representan la corriente que entrega la pila y las corrientes que circulan por R y R_V , respectivamente.

La resistencia equivalente R_{eq} del circuito es

$$R_{eq} = R_{AC} + R // (R_{CE} + R_V + R_{DF}) + R_{BD} + R_i$$

Donde $R // (R_{CE} + R_V + R_{DF})$ representa la resistencia equivalente a la conexión en paralelo entre R y $(R_{CE} + R_V + R_{DF})$

$$[R // (R_{CE} + R_V + R_{DF})]^{-1} = R^{-1} + (R_{CE} + R_V + R_{DF})^{-1}$$

Dado que $R_V \gg R_{CE} + R_{DF}$

$$[R // (R_{CE} + R_V + R_{DF})]^{-1} = R^{-1} + R_V^{-1} = \frac{R_V + R}{R_V R}$$

$$R // (R_{CE} + R_V + R_{DF}) = \frac{R_V R}{R_V + R}$$

Dado que $R_V \gg R$

$$R // (R_{CE} + R_V + R_{DF}) = R$$

$$R_{eq} = R_i + R_{AC} + R + R_{BD} = R^* + R$$

Con

$$R^* = R_i + R_{AC} + R_{BD}$$

Donde R^* representa la resistencia intrínseca del circuito.

1.b.

La corriente i que entrega la pila cumple con

$$\varepsilon = iR_{eq} = i(R^* + R)$$

La caída de tensión entre los puntos CD (V_{CD}) se puede escribir como

$$V_{CD} = R i_R = (R_{CE} + R_V + R_{DF})i_V$$

Donde i_R e i_V son las corrientes que circulan por las resistencias R y R_V , respectivamente con

$$i = i_R + i_V$$

Luego,

$$\frac{i_V}{i_R} = \frac{R}{(R_{CE} + R_V + R_{DF})} = \frac{R}{R_V} \ll 1$$

Entonces,

$$i = i_R$$

1.c.

La caída de tensión entre los puntos CD (V_{CD}) también se puede escribir como

$$V_{CD} = R i_R = (R_{CE} + R_V + R_{DF})i_V = (R_{CE} + R_{DF})i_V + V_R = V_R$$

$$V_R = iR$$

1.d.

$$\varepsilon = iR_{eq} = i(R + R^*)$$

Con

$$i = \frac{V_R}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{V_R}{R} (R + R^*)$$

2.

Ver Tabla I con los valores medidos.

3.

Ver Tabla I con los valores medidos.

Tabla I: Valores medidos de R y V_R con su respectiva incertidumbre.

R [Ω](200 Ω)	V_R [V] (2V)	R [Ω]	ΔR [Ω]	V_R [V]	ΔV_R [V]	x [Ω^{-1}]	Δx [Ω^{-1}]	y [V^{-1}]	Δy [V^{-1}]
5,3	1,524	5,3	0,3	1,52	0,01	0,19	0,01	0,658	0,004
6,2	1,527	6,2	0,4	1,53	0,01	0,16	0,01	0,654	0,004
7,4	1,536	7,4	0,4	1,54	0,01	0,135	0,007	0,649	0,004
9,0	1,541	9,0	0,4	1,54	0,01	0,111	0,005	0,649	0,004
10,6	1,546	10,6	0,4	1,55	0,01	0,094	0,004	0,645	0,004
12,6	1,549	12,6	0,4	1,55	0,01	0,079	0,003	0,645	0,004
15,6	1,554	15,6	0,4	1,55	0,01	0,064	0,002	0,645	0,004
18,8	1,557	18,8	0,5	1,56	0,01	0,053	0,001	0,641	0,004
22,6	1,560	22,6	0,5	1,56	0,01	0,044	0,001	0,641	0,004
26,7	1,563	26,7	0,5	1,56	0,01	0,0375	0,0007	0,641	0,004

Los valores reportados en las dos primeras columnas de la Tabla I (R [Ω] (200 Ω) y V_R [V] (2V)) son los valores medidos con el óhmetro y el voltímetro sin corregir por la incertidumbre. El valor reportado entre paréntesis indica la escala usada para la medición.

4.a.

Para la medición de ε , se conecta en paralelo a la pila el voltímetro. En este caso, el circuito equivalente se puede esquematizar como

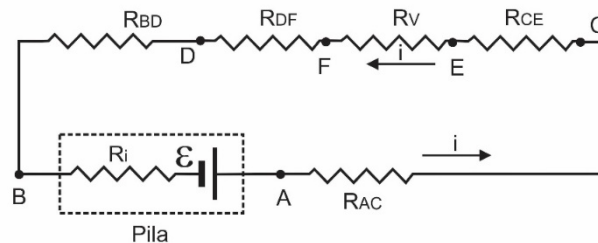


Figura s2. Circuito equivalente para la medición con el voltímetro de ε .

4.b.

La resistencia equivalente del circuito es

$$R_{eq} = R_{AC} + R_{CE} + R_V + R_{DF} + R_{BD} + R_i = R_V$$

Luego, la corriente que circula por el circuito es

$$i = \frac{\varepsilon}{R_V}$$

Dado que la caída de tensión que mide el voltímetro es $V_V = i R_V$, entonces

$$V_V = \varepsilon$$

El valor de ε es

$$\varepsilon = (1,58 \pm 0,01) V$$

5.

Dada la ecuación encontrada en el punto 1, se pueden definir las siguientes variables

$$x = \frac{1}{R}$$

$$y = \frac{1}{V_R}$$

Luego, la ecuación encontrada en el punto 1 se puede reescribir como

$$y = b + mx$$

Con

$$m = \frac{R^*}{\varepsilon}$$

$$b = \frac{1}{\varepsilon}$$

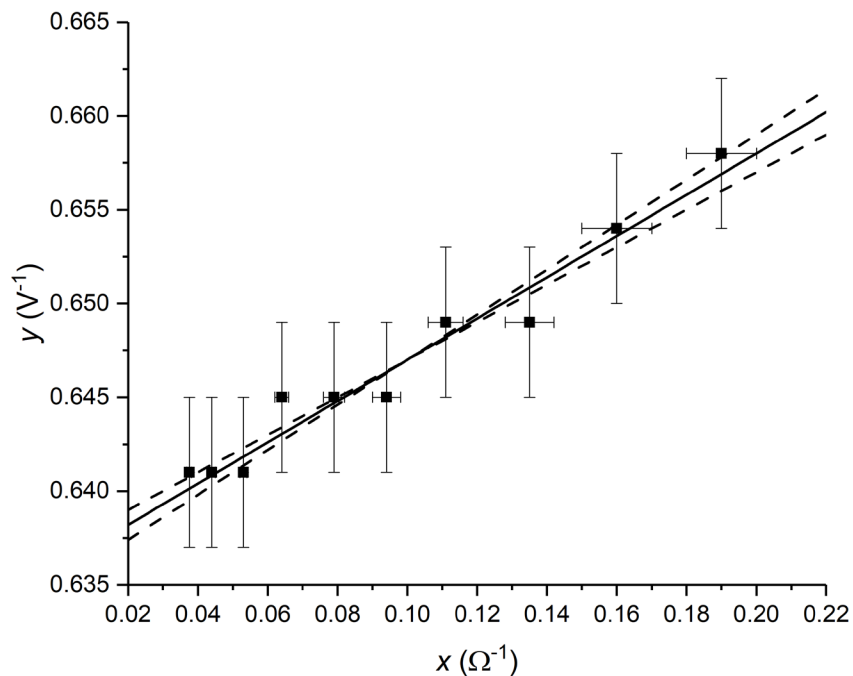
En la Tabla I se reportan los valores obtenidos para x y y con sus respectivas incertidumbres Δx y Δy .

Para el cálculo de las incertidumbres se usó

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta R}{R}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta R}{R}$$

6.



Del ajuste se obtiene

$$m = (0,636 \pm 0,001)A^{-1}$$

$$b = (0,11 \pm 0,01)V^{-1}$$

7.

De la relación encontrada en el punto 5,

$$\varepsilon = \frac{1}{b} = (1,572 \pm 0,003) V$$

$$R^* = \frac{m}{b} = (0,17 \pm 0,02)\Omega$$

Para el cálculo de la incertidumbre se usó

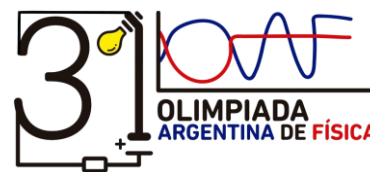
$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta R^*}{R^*} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta b}{b}$$

Olimpiada Argentina de Física

Instancia Nacional 2021

Prueba Teórica – NIVEL 1



Reglas a tener en cuenta

Antes de comenzar la prueba:

- No consigne **en ningún sitio de la prueba su nombre, apellido o DNI, de hacerlo: será causal de descalificación.**
- Lea cuidadosamente **TODO** el enunciado de la prueba.

Durante la prueba:

- Sólo puede utilizar las hojas provistas, lapicera azul o negra, una regla y una calculadora científica no programable. **Escriba únicamente con lapicera**, resaltados o uso de otros colores serán plausibles de descalificación.
- Cualquier **duda o consulta** que quiera realizar la debe hacer **únicamente por escrito al Profesor, en privado, al chat del Aula de la prueba.**
- La solución de cada problema teórico debe comenzar en una nueva hoja.
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas **por problema**. **No enumere las hojas del enunciado y no escriba respuestas en ellas pues no serán consideradas.**
- **Escriba de un solo lado de las hojas.**

Al finalizar la prueba:

- Escanee o fotografíe cuidadosa y **únicamente las hojas con sus respuestas** (descarte el enunciado). **Antes de la solución a cada problema siempre debe estar la correspondiente hoja de respuestas provista.**
- Con las imágenes de cada problema genere tres archivos .pdf. **Nombre cada archivo .pdf con el número de problema correspondiente, su nombre y apellido.**
- Verifique que los archivos .pdf se ven correctamente y que las páginas están en el orden correcto. Entregue los mismos en el Classroom de la Prueba.

Problema 1: “Alambrao” de siete hilos, poste de ñandubay, molino marca “Guanaco” y la flor del Paraguay!!!

El agua es un recurso que no siempre está disponible, que es escaso y por lo tanto debe cuidarse mucho.

En las zonas rurales o casi rurales puede ser necesario obtenerla de un pozo, ya sea excavado o perforado, cuyo fondo está en el nivel freático (profundidad a la que se encuentra agua subterránea). Por otro lado, es conveniente emplear energía obtenida mediante métodos no “contaminantes” para el funcionamiento de los dispositivos a usar para acceder al agua.

La energía eólica es la energía que se puede obtener a partir de la transformación de la energía cinética de las corrientes de aire. Se puede utilizar para la generación de energía eléctrica, mediante aerogeneradores en parques eólicos, o para transformarla en energía mecánica y mover una bomba de agua... con la consiguiente extracción de agua.

Se propone en este problema estudiar el aprovechamiento de la energía eólica disponible mediante un molino de viento para la extracción de agua.

Consideraciones

La energía que se utiliza en los molinos de viento es la energía cinética de las masas de aire en movimiento (viento), la cual se transforma mediante el molino en energía mecánica. La energía cinética E_c de una masa de aire m en movimiento con velocidad V , se define como:

$$E_{cv} = \frac{1}{2}mV^2$$

donde E_{cv} es la energía cinética del viento, m es la masa de un volumen de aire que se mueve (viento) y V es la velocidad del viento.

- a) Suponiendo que la masa de aire m tiene una densidad ρ y que atraviesa una superficie de área S , muestre que la potencia P_v asociada al viento es:

$$P_v = \frac{1}{2}\rho SV^3$$

En el caso de un molino de viento, S es la superficie que corresponde a las aspas del mismo (rotor) y se puede considerar igual a:

$$S = \pi R^2$$

donde R es el radio del rotor del molino.

La potencia teórica máxima P_t que se puede aprovechar con un molino es aproximadamente el 59% de la potencia que está asociada a la masa de aire en movimiento.

- b) Dé una expresión para la potencia teórica máxima aprovechable P_t mediante un molino.

Rendimiento Aerodinámico

La potencia aprovechable P del viento, mediante un molino, es menor que la teórica P_t . El rendimiento aerodinámico C_p se asocia con la eficiencia de diferentes molinos de viento y se usa para comparar los diferentes tipos que existen sin tomar en cuenta las diferencias de tamaños entre cada uno. El coeficiente de rendimiento aerodinámico es el

cociente entre la potencia mecánica obtenida mediante el molino P y la potencia asociada al viento.

c) De una expresión para C_p

Se quiere instalar un molino de eje horizontal para sacar agua de un pozo. Dicho molino tiene $C_p = 0.3$ y un rotor de radio R . Además, se sabe que la eficiencia de la bomba que se conectará al molino es $\eta_b = 0.3$.

d) Dé una expresión para la potencia efectiva P_{ef} , teniendo en cuenta el rendimiento del molino y de la bomba, en función de R .

El agua se obtendrá, mediante el molino, de un pozo que tiene una profundidad $h_p = 15$ m y el tanque en el que se almacenará está a $h_t = 10$ m por sobre el nivel del suelo. La densidad del agua es $\rho_a = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y la aceleración gravitatoria $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

e) Sin considerar la viscosidad del agua, dé una expresión para la potencia P_h necesaria para conseguirlo en términos del caudal de carga Q .

En la región donde se va a instalar el molino, la velocidad promedio del viento es de 4m/s. Además se sabe que la densidad del aire es aproximadamente $\rho = 1.1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a temperatura ambiente y a 1 atmósfera.

f) Determine el valor de Q si el rotor del molino tiene un radio $R = 122$ cm.

Hoja de Respuestas Problema 1 - Nivel 1

		Pts
a.		
b.		
c.		
d.		
e.		
f.		

Problema 2: Un problema espacial.

Uno de los tantos satélites artificiales que orbita nuestro planeta, y cuya puesta en órbita ha significado un gran hito para la humanidad, es la Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés).

La ISS orbita alrededor de la Tierra desde el año 1998, en una órbita casi-circular, a una altura promedio de 370 km . Con una masa de 44000 kg , la ISS está permanentemente habitada por científicos de distintas nacionalidades, que realizan investigaciones en las más diversas disciplinas.

Un equipo de científicos, recién llegado a la estación, está por emprender un nuevo desafío, responder la siguiente pregunta: *¿Pueden las hormigas ser entrenadas para cargar tornillos en el espacio?*

Al arribar a la ISS, los integrantes de este equipo se dan cuenta que olvidaron empacar un insumo básico para su investigación... ¡olvidaron los tornillos!

Es por ello que el capitán Kirk de la ISS pide a la estación terrena que se envíen los tornillos en un cargamento lo antes posible... en el primer vuelo del transbordador espacial *Enterprise*.

El lanzamiento se realiza desde el centro espacial del Cabo Flandaveral usando el vehículo *Falcon 9*, con el impulso necesario para alcanzar la *misma órbita* que la ISS.

Para que la carga llegue a su destino será necesario que el capitán del transbordador, Jean Luc Picard, realice ciertas maniobras para alcanzar a la estación espacial...

Aprovechando el viaje, ya que poner en órbita un cohete es extremadamente costoso, el transbordador espacial fue cargado (además de los tornillos) con insumos imprescindibles para la vida en el espacio.

Consideremos que el transbordador espacial *Enterprise* tiene una masa de 9000 kg y transporta una carga de 3000 kg .

Se planificó que la entrega del cargamento se realice en un punto particular de la órbita, al que llamaremos punto P .

Luego de ser lanzado, el transbordador *Enterprise* llega a la altura de órbita de la ISS con una diferencia de 105 segundos atrasado con respecto a la posición de la misma; es decir, el transbordador tiene la misma órbita que la ISS y pasa por el punto fijo P de la órbita 105 segundos después que la ISS.

Para poder entregar la carga, el capitán del transbordador tiene que maniobrar para poder encontrarse con la ISS en el punto P . Para esa operación el transbordador dispone de un cohete de maniobra que, al dispararse, le permite hacer un cambio de un 0.65% en su velocidad.

Considera que la órbita de la ISS y del transbordador es una órbita circular de radio a .

- 1) Antes de que el capitán Picard dispare el cohete de maniobra, calcula:
 - a) el radio a de la órbita del transbordador,
 - b) la energía total E , la energía cinética K y la energía potencial U ,
 - c) el período de la órbita T ,
 - d) la velocidad del transbordador v .

- 2) En el momento que el transbordador alcanza el punto P , el capitán Picard dispara el cohete de maniobra hacia adelante. Calcula:
 - a) la velocidad v' del transbordador y su energía cinética K' ,
 - b) la energía potencial U' inmediatamente luego del disparo del cohete,
 - c) la energía total E' ,
 - d) el período T' y el radio a' del transbordador,
 - e) indica si el transbordador se encuentra con la ISS en el punto P .

Datos

Ley de Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}$, donde a es la distancia al centro de la Tierra.

Masa de la Tierra: $M_T = 5,98 \times 10^{24} kg$

Radio de la Tierra: $R_T = 6370 km$

Constante de Gravitación: $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$

$\pi = 3,14$

Apéndice

Los satélites artificiales en órbita son parte cotidiana de la vida moderna, al punto de convertirse en un serio y peligroso problema debido a la gran cantidad que se encuentran orbitando junto a la basura espacial. Por esto, la planificación de una misión espacial es un problema muy complejo, donde se necesita de la colaboración y esfuerzo de muchas personas de distintas disciplinas. Sin embargo, problemas concretos como lo son la puesta en órbita de un satélite artificial, o el encuentro de dos naves en un punto particular de alguna órbita, se puede hasta cierto punto simplificar y entender mediante un conjunto de leyes fundamentales, como lo son: las leyes de Newton, su ley de gravitación universal y las leyes de Kepler. Estas leyes permiten responder preguntas interesantes acerca de los transbordadores o satélites: ¿qué energía se necesita?, ¿cómo se mantienen en órbita y qué determina las propiedades de su órbita?

Dentro de las distintas órbitas que se pueden explicar y entender con estas leyes, las órbitas circulares constituyen el caso más sencillo e importante, pues muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares. Como simplificación, podemos suponer que la única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra, que suponemos en reposo, es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por tanto, hacia el centro de la órbita. Esto implica que el satélite está en movimiento circular *uniforme* y su rapidez es constante. En una órbita circular, la rapidez del satélite tiene el valor exacto para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra. Así, el satélite *no cae hacia* la Tierra, sino que cae constantemente *alrededor de* la Tierra. Esta rapidez se deduce de lo dicho anteriormente y tiene el valor $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, donde G es la constante de gravitación universal, M_T es la masa de la Tierra y r es la distancia al centro de la Tierra.

Otra característica importante de la órbita de un satélite, y que determina su tipo, es el valor o signo de la energía total E que adquiere el sistema (Tierra + satélite), donde si $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_T}{2r}$ es la energía cinética y la energía potencial compartida es $U(r) = -\frac{GmM_T}{r}$, la energía total es $E = K + U = -\frac{GmM_T}{2r}$.

Para órbitas elípticas (como caso particular encontramos a las órbitas circulares) se tiene $E < 0$, para órbitas parabólicas $E = 0$ y para órbitas hiperbólicas $E > 0$. La expresión dada para E es también válida para órbitas elípticas, solo hay que reemplazar el valor de r por el radio mayor de la elipse.

En otras palabras, como la energía total no depende de la excentricidad de la órbita, todas las órbitas con el mismo semieje mayor tienen la misma energía total. Además, nos dice que no podemos cambiar la velocidad de un satélite en órbita, sin cambiar también el radio de su órbita.

Hoja de Respuesta Problema 2 - Nivel 1

		Puntaje
1 a	$a =$	
1 b	$E =$ $K =$ $U =$	
1 c	$T =$	
1 d	$v =$	
2 a	$v' =$ $K' =$	
2 b	$U' =$	
2 c	$E' =$	
2 d	$T' =$ $a' =$	
2 e		

Problema 3: Colisión de Agujeros negros y emisión de Ondas gravitacionales.

El 14 de septiembre de 2015, la colaboración del Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Laser, LIGO, detectó radiación gravitacional proveniente de la colisión de dos agujeros negros ubicados a un billón de años luz de la tierra (es decir que ocurrió hace un billón de años). Este descubrimiento constituyó la primera observación directa de radiación gravitacional casi cien años después de que Einstein la predijo y abrió una nueva ventana al universo.

Usaremos argumentos simples basados en mecánica y gravedad Newtoniana y Relatividad Especial, junto con datos recolectados por LIGO, para estimar la masa total del sistema binario de agujeros negros y la porción de energía inicial del sistema que es transportada por las ondas gravitacionales.

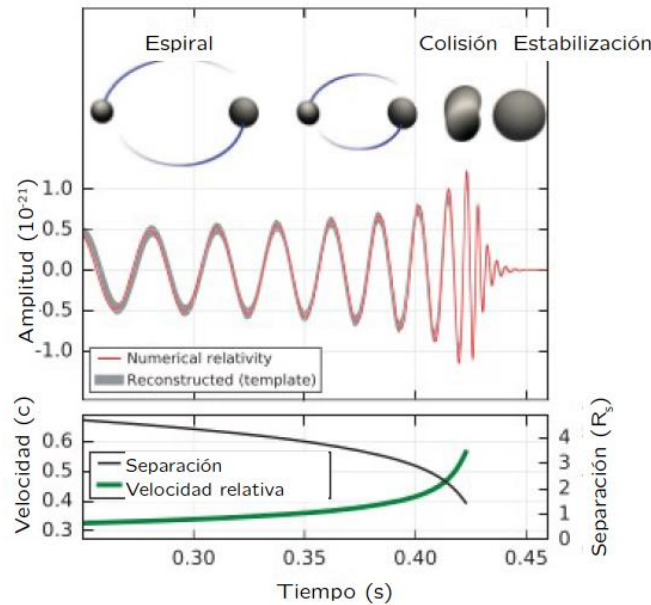


Figura 1: Las diferentes etapas de la colisión de agujeros negros. También se muestra la amplitud de la onda gravitacional detectada en Hanford, la separación efectiva Kepleriana y la velocidad relativa efectiva. [PRL 116, 061102 (2016)]

La colisión binaria de agujeros negros ocurre en tres etapas (ver **Figura 1**). Inicialmente, los agujeros negros orbitan alrededor de su centro de masa esencialmente en órbitas circulares. Durante esta etapa pierden energía en forma de radiación gravitacional y sus órbitas se achican, formando un espiral convergente. En la segunda etapa, los agujeros negros colisionan. En la tercera etapa, de estabilización, el sistema se relaja a un estado de equilibrio que consiste de un único agujero negro estacionario.

Durante la primera etapa, los dos agujeros negros se pueden modelar como partículas puntuales de masas m_1 y m_2 , que se mueven alrededor de su centro de masa común en órbitas circulares de radios d_1 y d_2 respectivamente, con velocidad angular ω . Los agujeros negros permanecen en lados opuestos de la órbita, a una separación $d = d_1 + d_2$.

Pregunta 1: El problema de dos masas puntuales m_1 , m_2 ubicadas a distancias d_1 , d_2 del centro de masa respectivamente, y sujetas sólo al campo gravitatorio de la otra masa puntual, es equivalente al problema de una masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ubicada a una distancia $d = d_1 + d_2$ de una masa puntual fija $M = m_1 + m_2$. Teniendo en cuenta que la aceleración centrípeta de la masa reducida es

$$a = \omega^2 d \quad (1)$$

y que la masa reducida μ siente la fuerza gravitatoria producida por la masa M , determine la velocidad angular ω en términos de la separación entre los agujeros negros, sus masas y la constante de gravitación universal G .

Pregunta 2: Encuentre las distancias d_1 , d_2 entre los agujeros negros y el centro de masas en términos de la separación $d = d_1 + d_2$ y las masas m_1 , m_2 .

Pregunta 3: Muestre que el momento de inercia I del sistema de agujeros negros con respecto al centro de masa se puede escribir en términos de las masas y la distancia entre los agujeros negros d como:

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 \quad (2)$$

Pregunta 4: En la teoría de la Relatividad Especial de Einstein, un cuerpo de masa m posee un tipo de energía independiente de su movimiento y su posición, llamada Energía en reposo y cuyo valor es

$$E_{\text{reposo}} = mc^2 \quad (3)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Encuentre la energía total del sistema, como suma de las energías en reposo de los agujeros negros, la energía cinética y la energía potencial gravitatoria del sistema. Exprésela en términos de las masas, la separación d , la constante de gravitación G y la velocidad de la luz c .

Supondremos que la Mecánica Newtoniana y la ley de gravitación de Newton son válidas para el cálculo de la energía cinética y potencial del sistema.

Pregunta 5: Los agujeros negros no son masas puntuales y su tamaño es relevante cuando los agujeros están a punto de tocarse. Usando que la velocidad de escape de los agujeros negros es c , determine los radios R_1 y R_2 de cada agujero negro en términos de sus respectivas masas, de G y c . (Recuerde que la velocidad de escape de un cuerpo se define como la mínima velocidad que se debe impartir a una partícula puntual en la superficie del cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de un cuerpo, es decir, para que la partícula llegue al infinito con velocidad cero.)

Pregunta 6: Determine la energía total del sistema en el momento en que los agujeros negros entran en contacto. Exprésela en términos de las masas m_1 , m_2 y c .

Pregunta 7: A medida que los agujeros negros se acercan en su movimiento orbital, la velocidad angular crece. Determine la velocidad angular de los agujeros al momento de la colisión en términos de las masas de los agujeros negros, c y G .

Pregunta 8: En la **Figura 2** se muestran las mediciones de las ondas gravitacionales obtenidas por LIGO en Hanford y en Livingston generadas por la colisión de dos agujeros negros. A partir de estos gráficos estime el momento t_{choque} en que se produce el choque entre los agujeros negros y la frecuencia f_{choque} registrada en dicho momento.

Pregunta 9: Teniendo en cuenta que la frecuencia f se relaciona con velocidad angular ω mediante $\omega = 2\pi f$, indique la masa total del sistema binario medido por LIGO. Expresé el valor en masas solares (1 masa solar es $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$).

Pregunta 10: Los científicos de LIGO encontraron una masa total de $m_1 + m_2 = 65M_{\odot}$. Indique el error porcentual de la estimación encontrada en el ítem anterior.

Datos

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Constante de gravitación universal: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^{-2}$.

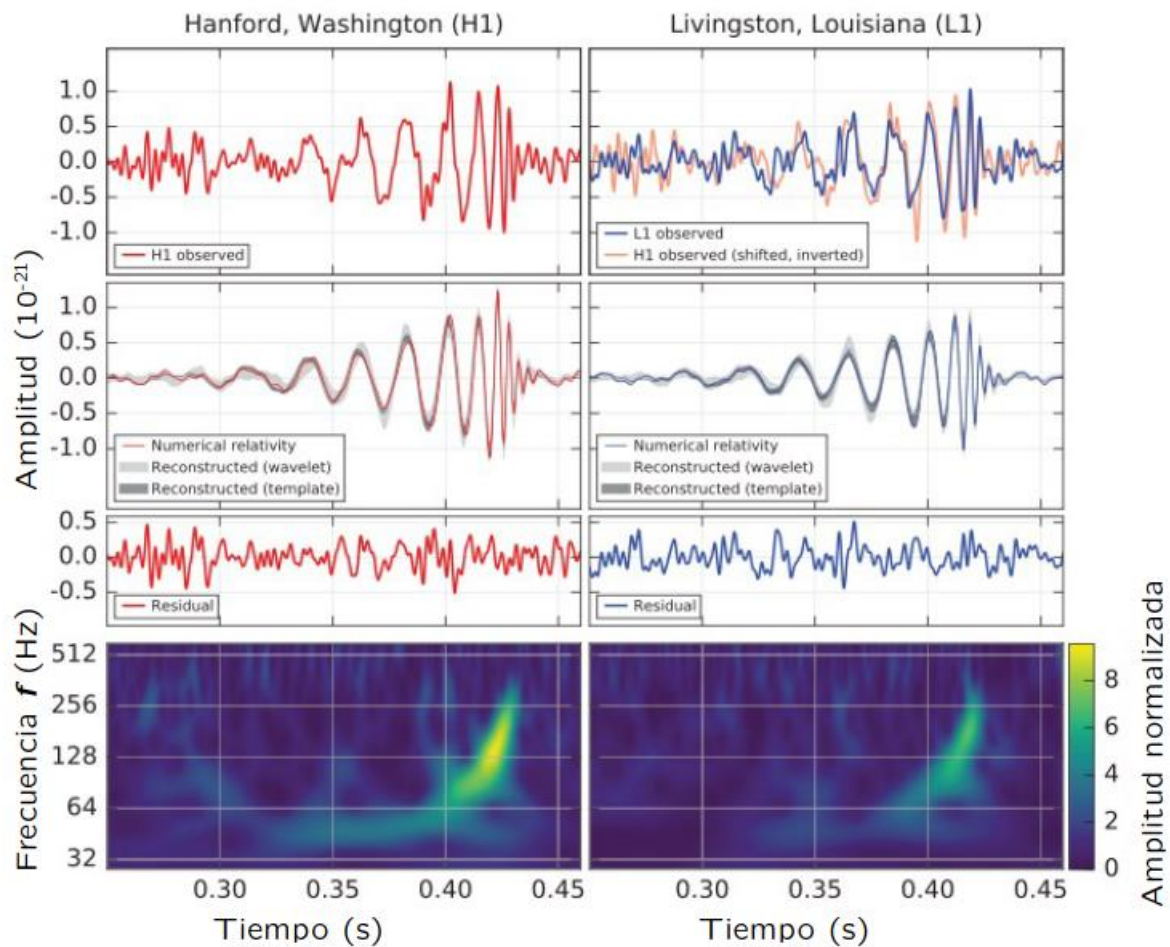


Figura 2: El evento GW150914 observado por los detectores LIGO Hanford (paneles izquierdos) y Livingston (paneles derechos). La primera fila muestra la amplitud de la onda gravitacional. La segunda fila muestra la señal filtrada y comparada con la simulación numérica. La tercera fila muestra la diferencia entre la medición y la simulación numérica. La cuarta fila es una representación tiempo-frecuencia de los datos, mostrando que la frecuencia de la señal crece en el tiempo. Además, la escala de colores indica la amplitud de la señal, creciendo desde los azules hasta los amarillos. [PRL 116, 061102 (2016)]

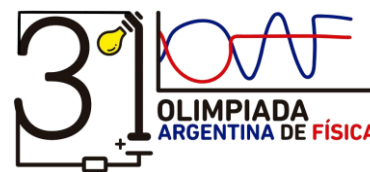
Hoja de Respuesta Problema 3 - Nivel 1

		Puntaje
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Olimpiada Argentina de Física

Instancia Nacional 2021

Prueba Teórica – NIVEL 2



Reglas a tener en cuenta

Antes de comenzar la prueba:

- No consigne **en ningún sitio de la prueba su nombre, apellido o DNI, de hacerlo: será causal de descalificación.**
- Lea cuidadosamente **TODO** el enunciado de la prueba.

Durante la prueba:

- Sólo puede utilizar las hojas provistas, lapicera azul o negra, una regla y una calculadora científica no programable. **Escriba únicamente con lapicera**, resaltados o uso de otros colores serán plausibles de descalificación.
- Cualquier **duda o consulta** que quiera realizar la debe hacer **únicamente por escrito al Profesor, en privado, al chat del Aula de la prueba.**
- La solución de cada problema teórico debe comenzar en una nueva hoja.
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas **por problema**. **No enumere las hojas del enunciado y no escriba respuestas en ellas pues no serán consideradas.**
- **Escriba de un solo lado de las hojas.**

Al finalizar la prueba:

- Escanee o fotografíe cuidadosa y **únicamente las hojas con sus respuestas** (descarte el enunciado). **Antes de la solución a cada problema siempre debe estar la correspondiente hoja de respuestas provista.**
- Con las imágenes de cada problema genere tres archivos .pdf. **Nombre cada archivo .pdf con el número de problema correspondiente, su nombre y apellido.**
- Verifique que los archivos .pdf se ven correctamente y que las páginas están en el orden correcto. Entregue los mismos en el Classroom de la Prueba.

Problema 1: “Alambrao” de siete hilos, poste de ñandubay, molino marca “Guanaco” y la flor del Paraguay!!!

El agua es un recurso que no siempre está disponible, que es escaso y por lo tanto debe cuidarse mucho.

En las zonas rurales o casi rurales puede ser necesario obtenerla de un pozo, ya sea excavado o perforado, cuyo fondo está en el nivel freático (profundidad a la que se encuentra agua subterránea). Por otro lado, es conveniente emplear energía obtenida mediante métodos no “contaminantes” para el funcionamiento de los dispositivos a usar para acceder al agua.

La energía eólica es la energía que se puede obtener a partir de la transformación de la energía cinética de las corrientes de aire. Se puede utilizar para la generación de energía eléctrica mediante aerogeneradores en parques eólicos, o para transformarla en energía mecánica y mover una bomba de agua... con la consiguiente extracción de agua.

Se propone en este problema estudiar el aprovechamiento de la energía eólica disponible mediante un molino de viento para la extracción de agua.

Consideraciones

La energía que se utiliza en los molinos de viento es la energía cinética de las masas de aire en movimiento (viento), la cual se transforma mediante el molino en energía mecánica. La energía cinética E_c de una masa de aire m en movimiento con velocidad V , se define como:

$$E_{cv} = \frac{1}{2}mV^2$$

donde E_{cv} es la energía cinética del viento, m es la masa de un volumen de aire que se mueve (viento) y V es la velocidad del viento.

- a) Suponiendo que la masa de aire m tiene una densidad ρ y que atraviesa una superficie de área S , muestre que la potencia P_v asociada al viento es:

$$P_v = \frac{1}{2}\rho SV^3$$

En el caso de un molino de viento, S es la superficie que corresponde a las aspas del mismo (rotor) y se puede considerar igual a:

$$S = \pi R^2$$

donde R es el radio del rotor del molino.

La potencia teórica máxima P_t que se puede aprovechar con un molino es aproximadamente el 59% de la potencia que está asociada a la masa de aire en movimiento.

- b) Dé una expresión para la potencia teórica máxima aprovechable P_t mediante un molino.

Rendimiento Aerodinámico

La potencia aprovechable P del viento, mediante un molino, es menor que la teórica P_t .

El rendimiento aerodinámico C_p se asocia con la eficiencia de diferentes molinos de viento y se usa para comparar los diferentes tipos que existen sin tomar en cuenta las diferencias de tamaños entre cada uno. El coeficiente de rendimiento aerodinámico es el

cociente entre la potencia mecánica obtenida mediante el molino P y la potencia asociada al viento.

c) De una expresión para C_p

Se quiere instalar un molino de eje horizontal para sacar agua de un pozo. Dicho molino tiene $C_p = 0.3$ y un rotor de radio R . Además, se sabe que la eficiencia de la bomba que se conectará al molino es $\eta_b = 0.3$.

d) Dé una expresión para la potencia efectiva P_{ef} , teniendo en cuenta el rendimiento del molino y de la bomba, en función de R .

El agua se obtendrá, mediante el molino, de un pozo que tiene una profundidad $h_p = 15$ m y el tanque en el que se almacenará está a $h_t = 10$ m por sobre el nivel del suelo. La densidad del agua es $\rho_a = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y la aceleración gravitatoria $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

e) Sin considerar la viscosidad del agua, dé una expresión para la potencia P_h necesaria para conseguirlo en términos del caudal de carga Q .

En la región donde se va a instalar el molino, la velocidad promedio del viento es de 4m/s. Además se sabe que la densidad del aire es aproximadamente $\rho = 1.1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a temperatura ambiente y a 1 atmósfera.

f) Determine el valor de Q si el rotor del molino tiene un radio $R = 122$ cm.

Pérdidas por la viscosidad del agua

Supondremos que en toda la cañería el caudal Q_v del fluido cumple con la ley de Poiseuille, esto es:

$$Q_v = \frac{\pi \Delta p}{8 \mu_a L} \left(\frac{D}{2}\right)^4$$

donde μ_a es la viscosidad del agua, L la longitud de la cañería por donde fluye, D su diámetro y Δp es la caída de presión entre los extremos de la cañería.

A partir de la expresión de Q_v y considerando que a $L = (h_p + h_t) = 25$ m, $D = 20$ mm y $\mu_a = 1.002 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$.

g) Calcule el valor de una altura equivalente h_e a la caída de presión Δp debida a la circulación del fluido por la cañería. Use $Q_v \cong Q$

h) Determine el valor de Q considerando la viscosidad del agua.

Una familia que cuida el agua y que necesita regar la quinta, necesita aproximadamente 300 litros de agua diarios. Considerando que hay viento aproximadamente 5 horas al día.

i) ¿Se satisfacen los requerimientos diarios?

Hoja de Respuestas Problema 1 - Nivel 2

		Pts
a.		
b.		
c.		
d.		
e.		
f.		
g.		

h.		
i.		

Problema 2: Un problema espacial.

Uno de los tantos satélites artificiales que orbita nuestro planeta, y cuya puesta en órbita ha significado un gran hito para la humanidad, es la Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés).

La ISS orbita alrededor de la Tierra desde el año 1998, en una órbita casi-circular, a una altura promedio de 370 km . Con una masa de 44000 kg , la ISS está permanentemente habitada por científicos de distintas nacionalidades, que realizan investigaciones en las más diversas disciplinas.

Un equipo de científicos, recién llegado a la estación, está por emprender un nuevo desafío, responder la siguiente pregunta: *¿Pueden las hormigas ser entrenadas para cargar tornillos en el espacio?*

Al arribar a la ISS, los integrantes de este equipo se dan cuenta que olvidaron empacar un insumo básico para su investigación... ¡olvidaron los tornillos!

Es por ello que el capitán Kirk de la ISS pide a la estación terrena que se envíen los tornillos en un cargamento lo antes posible... en el primer vuelo del transbordador espacial *Enterprise*.

El lanzamiento se realiza desde el centro espacial del Cabo Flandaveral usando el vehículo *Falcon 9*, con el impulso necesario para alcanzar la *misma órbita* que la ISS.

Para que la carga llegue a su destino será necesario que el capitán del transbordador, Jean Luc Picard, realice ciertas maniobras para alcanzar a la estación espacial...

Aprovechando el viaje, ya que poner en órbita un cohete es extremadamente costoso, el transbordador espacial fue cargado (además de los tornillos) con insumos imprescindibles para la vida en el espacio.

Consideremos que el transbordador espacial *Enterprise* tiene una masa de 9000 kg y transporta una carga de 3000 kg .

Se planificó que la entrega del cargamento se realice en un punto particular de la órbita, al que llamaremos punto P .

Luego de ser lanzado, el transbordador *Enterprise* llega a la altura de órbita de la ISS con una diferencia de 105 segundos atrasado con respecto a la posición de la misma; es decir, el transbordador tiene la misma órbita que la ISS y pasa por el punto fijo P de la órbita 105 segundos después que la ISS.

Para poder entregar la carga, el capitán del transbordador tiene que maniobrar para poder encontrarse con la ISS en el punto P . Para esa operación el transbordador dispone de un cohete de maniobra que, al dispararse, le permite hacer un cambio de un 0.65% en su velocidad.

Considera que la órbita de la ISS y del transbordador es una órbita circular de radio a .

- 1) Antes de que el capitán Picard dispare el cohete de maniobra, calcula:
 - a) el radio a de la órbita del transbordador,
 - b) la energía total E , la energía cinética K y la energía potencial U ,
 - c) el período de la órbita T ,
 - d) la velocidad del transbordador v .

- 2) En el momento que el transbordador alcanza el punto P , el capitán Picard dispara el cohete de maniobra hacia adelante. Calcula:
 - a) la velocidad v' del transbordador y su energía cinética K' ,
 - b) la energía potencial U' inmediatamente luego del disparo del cohete,
 - c) la energía total E' ,
 - d) el período T' y el radio a' del transbordador,
 - e) indica si el transbordador se encuentra con la ISS en el punto P .

Considerando que cuando un objeto está en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra, el periodo de la órbita es T y la rapidez orbital es v ; y que cuando el objeto se pasa a una órbita circular con radio un poco mayor $r + \Delta r$ (donde Δr es positiva y pequeña $\Delta r \ll r$), su nuevo periodo es $T + \Delta T$ y su nueva rapidez orbital es $v + \Delta v$.

3) Demostrá que ΔT y Δv están dadas por:

$$\Delta T = \frac{3\pi\Delta r}{v}$$

$$\Delta v = \frac{-\pi\Delta r}{T}$$

Sugerencia: usa la expresión $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ la cual es válida para valores de $x \ll 1$.

Ahora, un nuevo problema se ha suscitado a bordo de la Estación Espacial Internacional ISS: un cable de la antena principal se ha desprendido de un extremo.

Una cuadrilla de mantenimiento, a bordo del transbordador espacial *Voyager* y al mando de la capitana Kathryn Janeway, parte a solucionar el inconveniente.

La misión del transbordador *Voyager* consiste en retirar el cable averiado de 125 m longitud, que está unido a la ISS por un extremo y con el otro extremo flotando libre en el espacio. El *Voyager* se coloca en una órbita circular en el mismo plano orbital que la ISS, pero a una altitud 100 m superior.

El plan de la capitana Janeway es lograr que el transbordador pesque el extremo libre del cable en el instante en que la *Voyager* y la ISS se encuentren ambas alineadas con el centro de la Tierra. Una vez que el cable se **tense por completo**, éste logrará desprenderse de la ISS.

- 4) ¿Cuántos minutos después de que el transbordador atrape el extremo suelto, el cable se soltará de la ISS?
- 5) Demostrá que si el transbordador no logra pescar el cable, al primer intento, la cuadrilla deberá esperar un tiempo $t \approx \frac{T^2}{\Delta T}$ para estar en las mismas condiciones para la captura del cable.
- 6) Si estuvieras en lugar de la capitana Janeway... ¿cuánto tiempo estarías orbitando la Tierra hasta tener una segunda oportunidad de realizar la misión?

Datos

Ley de Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}$, donde a es la distancia al centro de la Tierra.

Masa de la Tierra: $M_T = 5,98 \times 10^{24}\text{ kg}$

Radio de la Tierra: $R_T = 6370\text{ km}$

Constante de Gravitación: $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{ kg}^{-2}$

$\pi = 3,14$

Apéndice

Los satélites artificiales en órbita son parte cotidiana de la vida moderna, al punto de convertirse en un serio y peligroso problema debido a la gran cantidad que se encuentran orbitando junto a la basura espacial. Por esto, la planificación de una misión espacial es un problema muy complejo, donde se necesita de la colaboración y esfuerzo de muchas personas de distintas disciplinas. Sin embargo, problemas concretos como lo son la puesta en órbita de un satélite artificial, o el encuentro de dos naves en un punto particular de alguna órbita, se puede hasta cierto punto simplificar y entender mediante un conjunto de leyes fundamentales, como lo son: las leyes de Newton, su ley de gravitación universal y las leyes de Kepler. Estas leyes permiten responder preguntas interesantes acerca de los transbordadores o satélites: ¿qué energía se necesita?, ¿cómo se mantienen en órbita y qué determina las propiedades de su órbita?

Dentro de las distintas órbitas que se pueden explicar y entender con estas leyes, las órbitas circulares constituyen el caso más sencillo e importante, pues muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares. Como simplificación, podemos suponer que la única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra, que suponemos en reposo, es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por tanto, hacia el centro de la órbita. Esto implica que el satélite está en movimiento circular *uniforme* y su rapidez es constante. En una órbita circular, la rapidez del satélite tiene el valor exacto para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra. Así, el satélite *no cae hacia* la Tierra, sino que cae constantemente *alrededor de* la Tierra. Esta rapidez se deduce de lo dicho anteriormente y tiene el valor $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, donde G es la constante de gravitación universal, M_T es la masa de la Tierra y r es la distancia al centro de la Tierra.

Otra característica importante de la órbita de un satélite, y que determina su tipo, es el valor o signo de la energía total E que adquiere el sistema (Tierra + satélite), donde si $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_T}{2r}$ es la energía cinética y la energía potencial compartida es $U(r) = -\frac{GmM_T}{r}$, la energía total es $E = K + U = -\frac{GmM_T}{2r}$.

Para órbitas elípticas (como caso particular encontramos a las órbitas circulares) se tiene $E < 0$, para órbitas parabólicas $E = 0$ y para órbitas hiperbólicas $E > 0$. La expresión dada para E es también válida para órbitas elípticas, solo hay que reemplazar el valor de r por el radio mayor de la elipse.

En otras palabras, como la energía total no depende de la excentricidad de la órbita, todas las órbitas con el mismo semieje mayor tienen la misma energía total. Además, nos dice que no podemos cambiar la velocidad de un satélite en órbita, sin cambiar también el radio de su órbita.

Hoja de Respuesta Problema 2 - Nivel 2

		Puntaje
1 a	$a =$	
1 b	$E =$ $K =$ $U =$	
1 c	$T =$	
1 d	$v =$	
2 a	$v' =$ $K' =$	
2 b	$U' =$	
2 c	$E' =$	
2 d	$T' =$ $a' =$	
2 e		
3		
4		
5		
6		

Problema 3: Colisión de Agujeros negros y emisión de Ondas gravitacionales.

El 14 de septiembre de 2015, la colaboración del Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Laser, LIGO, detectó radiación gravitacional proveniente de la colisión de dos agujeros negros ubicados a un billón de años luz de la tierra (es decir que ocurrió hace un billón de años). Este descubrimiento constituyó la primera observación directa de radiación gravitacional casi cien años después de que Einstein la predijo y abrió una nueva ventana al universo.

Usaremos argumentos simples basados en mecánica y gravedad Newtoniana y Relatividad Especial, junto con datos recolectados por LIGO, para estimar la masa total del sistema binario de agujeros negros y la porción de energía inicial del sistema que es transportada por las ondas gravitacionales.

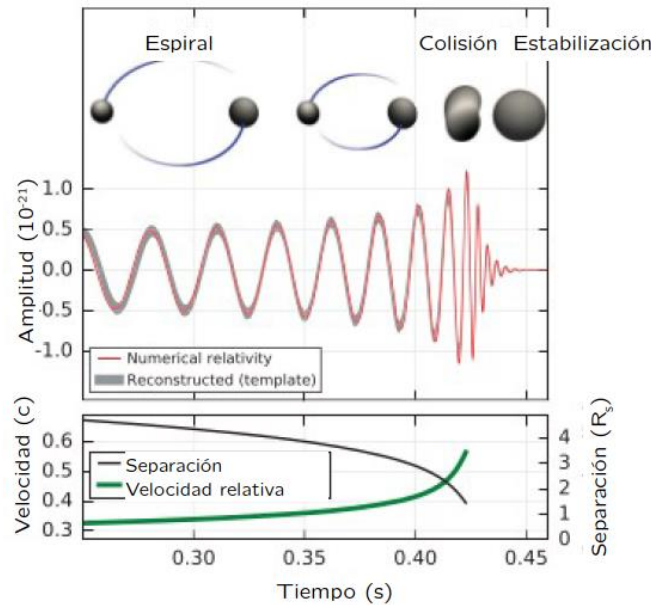


Figura 1: Las diferentes etapas de la colisión de agujeros negros. También se muestra la amplitud de la onda gravitacional detectada en Hanford, la separación efectiva Kepleriana y la velocidad relativa efectiva. [PRL 116, 061102 (2016)]

La colisión binaria de agujeros negros ocurre en tres etapas (ver **Figura 1**). Inicialmente, los agujeros negros orbitan alrededor de su centro de masa esencialmente en órbitas circulares. Durante esta etapa pierden energía en forma de radiación gravitacional y sus órbitas se achican, formando un espiral convergente. En la segunda etapa, los agujeros negros colisionan. En la tercera etapa, de estabilización, el sistema se relaja a un estado de equilibrio que consiste de un único agujero negro estacionario.

Durante la primera etapa, los dos agujeros negros se pueden modelar como partículas puntuales de masas m_1 y m_2 , que se mueven alrededor de su centro de masa común en órbitas circulares de radios d_1 y d_2 respectivamente, con velocidad angular ω . Los agujeros negros permanecen en lados opuestos de la órbita, a una separación $d = d_1 + d_2$.

Pregunta 1: El problema de dos masas puntuales m_1 , m_2 ubicadas a distancias d_1 , d_2 del centro de masa respectivamente, y sujetas sólo al campo gravitatorio de la otra masa puntual, es equivalente al problema de una masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ubicada a una distancia $d = d_1 + d_2$ de una masa puntual fija $M = m_1 + m_2$. Teniendo en cuenta que la aceleración centrípeta de la masa reducida es

$$a = \omega^2 d \tag{1}$$

y que la masa reducida μ siente la fuerza gravitatoria producida por la masa M , determine la velocidad angular ω en términos de la separación entre los agujeros negros, sus masas y la constante de gravitación universal G .

Pregunta 2: Muestre que el momento de inercia I del sistema de agujeros negros con respecto al centro de masa se puede escribir en términos de las masas y la distancia entre los agujeros negros d como:

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 \quad (2)$$

Pregunta 3: En la teoría de la Relatividad Especial de Einstein, un cuerpo de masa m posee un tipo de energía independiente de su movimiento y su posición, llamada Energía en reposo y cuyo valor es

$$E_{\text{reposo}} = mc^2 \quad (3)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Encuentre la energía total del sistema, como suma de las energías en reposo de los agujeros negros, la energía cinética y la energía potencial gravitatoria del sistema. Exprésela en términos de las masas, la separación d , la constante de gravitación G y la velocidad de la luz c .

Supondremos que la Mecánica Newtoniana y la ley de gravitación de Newton son válidas para el cálculo de la energía cinética y potencial del sistema.

Pregunta 4: Los agujeros negros no son masas puntuales y su tamaño es relevante cuando los agujeros están a punto de tocarse. Usando que la velocidad de escape de los agujeros negros es c , determine los radios R_1 y R_2 de cada agujero negro en términos de sus respectivas masas, de G y c . (Recuerde que la velocidad de escape de un cuerpo se define como la mínima velocidad que se debe impartir a una partícula puntual en la superficie del cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de un cuerpo, es decir, para que la partícula llegue al infinito con velocidad cero.)

Pregunta 5: Determine la energía total del sistema en el momento en que los agujeros negros entran en contacto. Exprésela en términos de las masas m_1 , m_2 y c .

Pregunta 6: A medida que los agujeros negros se acercan en su movimiento orbital, la velocidad angular crece. Determine la velocidad angular de los agujeros al momento de la colisión en términos de las masas de los agujeros negros, c y G .

Pregunta 7: En la **Figura 2** se muestran las mediciones de las ondas gravitacionales obtenidas por LIGO en Hanford y en Livingston generadas por la colisión de dos agujeros negros. A partir de estos gráficos estime el momento t_{choque} en que se produce el choque entre los agujeros negros y la frecuencia f_{choque} registrada en dicho momento.

Pregunta 8: Teniendo en cuenta que la frecuencia f se relaciona con velocidad angular ω mediante $\omega = 2\pi f$, indique la masa total del sistema binario medido por LIGO. Expresar el valor en masas solares (1 masa solar es $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$).

Pregunta 9: Los científicos de LIGO encontraron una masa total de $m_1 + m_2 = 65M_{\odot}$. Indique el error porcentual de la estimación encontrada en el ítem anterior.

Pregunta 10: Para el sistema anterior, se encontró que las masas de los agujeros negros eran $m_1 = 29M_{\odot}$ y $m_2 = 36M_{\odot}$. Para el siguiente ítem, por simplicidad, supondremos que las masas de los agujeros negros son iguales, es decir, tomamos $m_1 = m_2$.

Escriba la energía total $E_{\text{tot},i}$ justo en el momento antes de la colisión para el caso en que cada agujero tiene masa igual a m .

Escriba la energía total $E_{\text{tot},f}$ justo después de la colisión, suponiendo que como resultado, se forma un agujero negro estático de masa m_f .

Pregunta 11: La entropía S de un agujero negro está relacionada con su masa M mediante la expresión

$$S = sM \quad (4)$$

donde s es una constante relacionada con constantes universales. La entropía de las ondas gravitacionales es despreciable con relación a la entropía de los agujeros negros. Teniendo en cuenta el segundo principio de la termodinámica, indique cuál es el porcentaje máximo de la energía inicial que el sistema puede perder en forma de ondas gravitacionales durante el choque.

Datos

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Constante de gravitación universal: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^{-2}$.

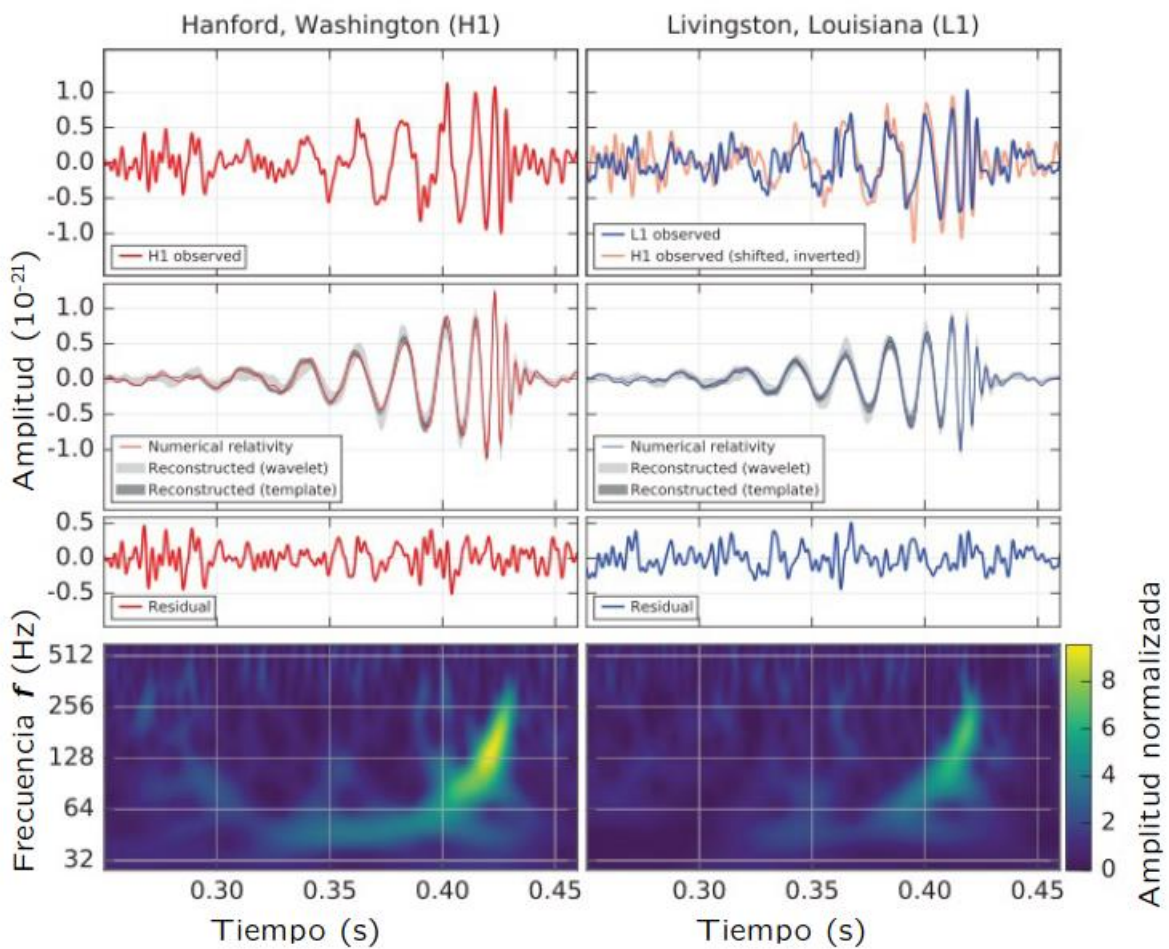


Figura 2: El evento GW150914 observado por los detectores LIGO Hanford (paneles izquierdos) y Livingston (paneles derechos). La primera fila muestra la amplitud de la onda gravitacional. La segunda fila muestra la señal filtrada y comparada con la simulación numérica. La tercera fila muestra la diferencia entre la medición y la simulación numérica. La cuarta fila es una representación tiempo-frecuencia de los datos, mostrando que la frecuencia de la señal crece en el tiempo. Además, la escala de colores indica la amplitud de la señal, creciendo desde los azules hasta los amarillos. [PRL 116, 061102 (2016)]

Hoja de Respuesta Problema 3 - Nivel 2

		Puntaje
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

Hoja de Respuestas Problema N°1:

Nivel 1

“Alambrao” de siete hilos, poste de ñandubay, molino marca “Guanaco” y la flor del Paraguay!!!

		Pts
1a.	<p>La energía cinética de una masa m “ de viento” es:</p> $\Delta E_{cv} = \frac{1}{2} V^2 m$ <p>si esta masa ocupa un volumen cilíndrico de sección S y largo Δx, esto es $\Delta V = S \Delta x$, el cual entrega su energía al aspa del molino, también se lo puede escribir como $\Delta V = S V \Delta t$, ya que esta masa entra en contacto durante un tiempo Δt con el aspa. Con lo que se tiene que entrega en el tiempo Δt una energía:</p> $\Delta E_{cv} = \frac{1}{2} V^2 \rho S V \Delta t$ <p>Con lo que la potencia es</p> $P_v = \frac{\Delta E_{cv}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S V^3$	3
1b.	$P_t = \frac{59}{100} \frac{1}{2} \rho S V^3$	1
1c.	$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho S V^3}$	1
1d.	$P_{ef} = \eta_b C_p \frac{1}{2} \rho V^3 \pi R^2$	1
1e.	$P_h = \rho_a g (h_p + h_t) Q$	2
1f.	<p>Si $R = 122$ cm,</p> $Q = \frac{\left[\eta_b C_p \frac{1}{2} \rho V^3 \pi R^2 \right]}{\left[\rho_a g (h_p + h_t) \right]} = 6.05 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}$	2

Hoja de Respuestas Problema N°1:

Nivel 2

“Alambrao” de siete hilos, poste de ñandubay, molino marca “Guanaco” y la flor del Paraguay!!!

		Pts
1a.	<p>La energía cinética de una masa m “de viento” es:</p> $\Delta E_{cv} = \frac{1}{2} V^2 m$ <p>si esta masa ocupa un volumen cilíndrico de sección S y largo Δx, esto es $\Delta V = S \Delta x$, el cual entrega su energía al aspa del molino, también se lo puede escribir como $\Delta V = S V \Delta t$, ya que esta masa entra en contacto durante un tiempo Δt con el aspa. Con lo que se tiene que entrega en el tiempo Δt una energía:</p> $\Delta E_{cv} = \frac{1}{2} V^2 \rho S V \Delta t$ <p>Con lo que la potencia es</p> $P_v = \frac{\Delta E_{cv}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S V^3$	2
1b.	$P_t = \frac{59}{100} \frac{1}{2} \rho S V^3$	0.2
1c.	$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho S V^3}$	0.4
1d.	$P_{ef} = \eta_b C_p \frac{1}{2} \rho V^3 \pi R^2$	0.4
1e.	$P_h = \rho_a g (h_p + h_t) Q$	2
1f.	<p>Si $R = 122$ cm,</p> $Q = \frac{\left[\eta_b C_p \frac{1}{2} \rho V^3 \pi R^2 \right]}{\left[\rho_a g (h_p + h_t) \right]} = 6.05 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	2

1g.	<p>Si $Q_v \cong Q$,</p> <p>Y</p> $\Delta p = \frac{8 \mu_a L Q}{\pi} \left(\frac{2}{D}\right)^4 = \rho_a g h_e$ $h_e = 0.04 \text{ m}$	1
1h.	$Q = \frac{\left[\eta_b C p \frac{1}{2} \rho V^3 \pi R^2 \right]}{\left[\rho_a g (h_p + h_t + h_e) \right]} = 6.04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	1
1i.	<p><i>Si, se satisfacen</i></p> <p><i>Litros = $Q \cdot 5.3600 = 6.04 \cdot 10^{-5} \cdot 5.3600 \text{ m}^3 = 1.0866 \text{ m}^3$</i></p> <p><i>= 1086.6 l</i></p>	1

Problema 2

Un Problema Espacial

Uno de los tantos satélites artificiales que orbitan nuestro planeta y cuya puesta en órbita ha significado un gran hito para la humanidad es sin dudas la estación espacial internacional (ISS, por sus siglas en inglés). La ISS se encuentra orbitando alrededor de la Tierra desde el año 1998 en una órbita casi-circular a una altura promedio de 370 km.

Con una masa de 44000Kg, la ISS está permanentemente habitada por científicos de distintas nacionalidades que realizan sus investigaciones en las más diversas disciplinas. Un equipo de científicos recién llegados a la estación estaban por emprender un nuevo desafío, intentaban responder la siguiente pregunta científica: *Pueden las hormigas ser entrenadas para cargar tornillos en el espacio?* Al arribar a la ISS, los integrantes de este equipo de científicos se dieron cuenta que se olvidaron empacar un insumo básico para su investigación... olvidaron los tornillos!

Es por ello que el capitán Kirk de la ISS pidió a la estación terrena que se envíen los tornillos en un cargamento lo antes posible en el primer vuelo del transbordador espacial *Enterprise* de *SpaceX*. El lanzamiento se realiza desde el centro espacial del Cabo Flandaveral usando el vehículo *Falcon 9*, con el impulso necesario para alcanzar la **misma órbita** que la ISS. Para que la carga llegue a su destino será necesario que el capitán del transbordador, Jean Luc Picard, realice ciertas maniobras para alcanzar a la estación espacial...

Aprovechando el viaje (ya que poner en órbita un cohete es extremadamente costoso) el transbordador espacial además fue cargado con insumos imprescindibles para la vida en el espacio. Consideremos que el transbordador espacial Enterprise tiene una masa de 9000kg y transporta una carga de 3000kg.

Se planificó que la entrega del cargamento se realice en un punto particular de la órbita, al que llamaremos el punto P . Una vez lanzado, el transbordador Enterprise llega a la altura de órbita de la ISS con una diferencia de 105 segundos atrasado con respecto a la posición de la misma. Es decir, la ISS pasa por el punto fijo P de la órbita 105 segundos antes que el transbordador espacial.

Para poder entregar la carga, el capitán del transbordador tiene que hacer alguna maniobra para poder encontrarse con la ISS en el punto P . Para esa operación el transbordador dispone de un cohete de maniobra que, al dispararse, le permite hacer un cambio de un 0.65% en su velocidad.

Considerá que la órbita de la ISS y del transbordador es una órbita circular de radio a .

1) Antes de que el capitán Picard dispare el cohete de maniobra, calcula:

- a) el radio a de la órbita del transbordador,
- b) la energía total E , la energía cinética K y la energía potencial U ,
- c) el período de la órbita T ,
- d) la velocidad del transbordador v .

2) En el momento que el transbordador alcanza el punto P , el capitán Picard dispara el cohete de maniobra hacia adelante. Calculá:

- a) la velocidad v' del transbordador y su energía cinética K' ,
- b) la energía potencial U' inmediatamente luego del disparo del cohete,
- c) la energía total E' ,
- d) el período T' y el radio a' del transbordador,
- e) indica si el transbordador se encuentra con la ISS en el punto P

Considerando que cuando un objeto está en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra, el período de la órbita es T y la rapidez orbital es v ; y que cuando el objeto se pasa a una órbita circular con radio un poco mayor $r + \Delta r$ (donde Δr es positiva y pequeña $\Delta r \ll r$), su nuevo periodo es $T + \Delta T$ y su nueva rapidez orbital es $v + \Delta v$.

3) Demostrá que ΔT y Δv están dada por

$$\Delta T = \frac{3\pi\Delta r}{v} \quad \text{y} \quad \Delta v = -\frac{\pi\Delta r}{T} \quad (1)$$

Sugerencia: usá la expresión $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ la cual es válida para valores de $|x| \ll 1$.

Ahora, un nuevo problema se ha suscitado a bordo de la Estación Espacial Internacional ISS: un cable de la antena principal se ha desprendido de un extremo. Una cuadrilla de mantenimiento, a bordo del transbordador espacial *Voyager* y al mando de la capitana Kathryn Janeway, parte a solucionar el inconveniente. La misión del transbordador Voyager consiste en retirar el cable averiado de 125m de longitud, que está unido a la ISS por un extremo y con el otro extremo flotando libre en el espacio. El Voyager se coloca en una órbita circular en el mismo plano orbital que la ISS, pero a una altitud 100m superior.

El plan de la capitana Janeway es lograr que el transbordador pesque el extremo libre del cable en el instante en que la Voyager y la ISS se encuentren ambas alineados con el centro de la Tierra. Una vez que el cable se **tense por completo**, éste logrará desprenderse de la ISS.

4) ¿Cuántos minutos después de que el transbordador atrape el extremo suelto, el cable se soltará de la ISS?

5) Demostrá que si el transbordador no logra pescar el cable, al primer intento, la cuadrilla deberá esperar un tiempo $t \approx T^2/\Delta T$ para estar en las mismas condiciones para la captura del cable.

6) Si estuvieras en lugar de la capitana Janeway... ¿cuánto tiempo estarías orbitando la Tierra hasta tener una segunda oportunidad de realizar la misión?

Datos:

Ley de Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}$, donde a es la distancia al centro de la Tierra.

Masa de la Tierra: $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6370$ km

Constante de Gravitación: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²

$\pi = 3.14$

Apéndice

Los satélites artificiales en órbita son parte cotidiana de la vida moderna a tal punto de convertirse en un serio y peligroso problema debido a la gran cantidad de satélites en órbita junto a la basura espacial. Por esto la planificación de una misión espacial es un problema muy complejo, donde se necesita de la colaboración y esfuerzo de muchas personas de distintas disciplinas. Sin embargo, problemas concretos como lo son la puesta en órbita de un satélite artificial, o el encuentro de dos naves en un punto particular de alguna órbita se puede hasta cierto punto simplificar y entender mediante un conjunto de leyes fundamentales como lo son: las leyes de Newton, su ley de gravitación universal y las leyes de Kepler. Estas leyes permiten responder preguntas interesantes acerca de los transbordadores o satélites: ¿qué energía se necesita, cómo se mantienen en órbita y qué determina las propiedades de su órbita?

Dentro de las distintas órbitas que se pueden explicar y entender con estas leyes, las órbitas circulares constituyen el caso más sencillo e importante, pues muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares. Como simplificación, podemos suponer que la única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra, que suponemos en reposo, es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por tanto, hacia el centro de la órbita. Esto implica que el satélite está en movimiento circular *uniforme* y su rapidez es constante. En una órbita circular, la rapidez del satélite tiene el valor exacto para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra. Así, el satélite *no cae hacia* la Tierra, sino que cae constantemente *alrededor de* la Tierra. Esta rapidez se deduce de lo dicho anteriormente y tiene el valor $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, donde G es la constante de gravitación universal, M_T es la masa de la Tierra y r es la distancia al centro de la Tierra.

Otra característica importante de la órbita de un satélite y que determina su tipo es el valor o signo de la energía total E que adquiere el sistema (Tierra+satélite), donde si $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{GmM_T}{2r}$

es la energía cinética y la energía potencial compartida es $U(r) = -\frac{GmM_T}{r}$, la energía total es $E = K + U = -\frac{GmM_T}{2r}$. Para órbitas elípticas (como caso particular encontramos a las órbitas circulares) se tiene $E < 0$, para órbitas parabólicas $E = 0$ y para órbitas hiperbólicas $E > 0$. La expresión dada para E es también válida para órbitas elípticas, solo hay que reemplazar el valor de r por el radio mayor de la elipse. En otras palabras como la energía total no depende de la excentricidad de la órbita, todas las órbitas con el mismo semieje mayor tienen la misma energía total. Además nos dice que no podemos cambiar la velocidad de un satélite en órbita sin cambiar también el radio de su órbita.

Solución

Item 1)

- a) Antes del disparo del cohete la órbita del transbordador es igual a la de la ISS, es decir, es circular de radio $a = R_T + h = (6370 + 370)\text{km} = 6740 \text{ km}$.
- b) Usando que la masa del transbordador es $m_t = 12000 \text{ kg}$, luego la energía total E del transbordador es:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{Gm_tM_T}{2a} & (2) \\ &= -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(12 \times 10^3 \text{ kg})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{2(6.74 \times 10^6 \text{ m})} \\ &= -35.50 \times 10^{10} \text{ J} & (3) \end{aligned}$$

Para una órbita circular se puede demostrar que la energía cinética K es numéricamente igual al negativo de la energía total. Por lo que la energía cinética del transbordador es:

$$K = -E = 35.50 \times 10^{10} \text{ J} \quad (4)$$

A partir de la energía mecánica total E , la energía potencial resulta:

$$U = -2K = 2E = -71.0 \times 10^{10} \text{ J}.$$

- c) El período de la órbita del transbordador es igual a la de la ISS:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} & (5) \\ &= \frac{2\pi (6.740 \times 10^6 \text{ m})^{3/2}}{\sqrt{(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}} \\ &= 5502.0 \text{ s} & (6) \end{aligned}$$

d) Usando el valor de la energía cinética, se puede hallar la velocidad del transbordador:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2K}{m_t}} = \sqrt{\frac{235.51 \times 10^{10} J}{12000 kg}} \\ &= 7692.0 m/s \end{aligned} \quad (7)$$

Item 2)

La maniobra apropiada consiste en disparar el cohete de maniobra hacia adelante para producir una reducción de la velocidad. Al reducir su velocidad, la órbita del transbordador cambia a una nueva órbita casi circular, es decir elíptica con semieje mayor a' . Consecuentemente reduce su período, lo que le permite alcanzar a la estación en el punto P , veamos por qué.

a) Luego del disparo del cohete, la velocidad se reduce a un valor v' de la siguiente manera:

$$v' = (1 - 0.0065)v = 7642.0 m/s.$$

Con esta nueva velocidad, se puede calcular la energía cinética del transbordador luego del disparo del cohete, sea K' dicha energía cinética:

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{2}mv'^2 \quad (8) \\ &= \frac{1}{2}12000 kg(7.642 \times 10^3 m/s)^2 \\ &= 35.04 \times 10^{10} J \quad (9) \end{aligned}$$

b) La energía potencial del transbordador en el punto P inmediatamente después del disparo no ha cambiado (ya que en ese instante el transbordador no ha cambiado su distancia al centro de la Tierra):

$$U' = 2E = -71.0 \times 10^{10} J.$$

c) Por lo tanto, la energía total luego del disparo será:

$$E' = K' + U' = -35.96 \times 10^{10} J.$$

d) De las relaciones de proporcionalidad que existe entre las variables E, T y a podemos encontrar las relaciones útiles:

$$\frac{a'}{a} = \frac{E}{E'}, \quad y \quad \frac{T'}{T} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} = \left(\frac{E}{E'}\right)^{3/2}, \quad (10)$$

Con estas expresiones y el valor de la energía total calculado, podemos encontrar que el nuevo período T' del transbordador es:

$$T' = \left(\frac{E}{E'}\right)^{3/2} T = \left(\frac{35.50}{35.96}\right)^{3/2} 5502.2 = 5396.9 s \approx 5397 s.$$

Por otro lado, el nuevo radio a' es:

$$a' = \left(\frac{E}{E'} \right) a = \left(\frac{35.50}{35.96} \right) 6740 \text{ km} = 6653.78 \text{ km},$$

o bien se puede determinar directamente de $a' = -\frac{Gm_t M_T}{2E'}$.

- e) Si consideremos que al tiempo $t_0 = 0 \text{ s}$ la ISS pasa por el punto P , entonces volverá a pasar por este punto al tiempo $t_{\text{ISS}} = 5502 \text{ s}$. Por su parte, el transbordador pasará por el punto P 105 s más tarde, momento en el cual realiza el disparo. Luego del disparo, le tomará otros 5397 s volver a pasar por el punto P . Por lo tanto, el transbordador vuelve a pasar por el punto P en el tiempo $t_{\text{trans}} = 105 \text{ s} + 5397 \text{ s} = 5502 \text{ s}$ coincidiendo con la ISS.

Item 3)

Partiendo de la expresión para T , consideramos un incremento $\Delta r \ll r$ en el valor de r , es decir: $r \rightarrow r + \Delta r$, esto produce un incremento en el período T :

$$\begin{aligned} T + \Delta T &= \frac{2\pi(r + \Delta r)^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} \\ &= \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right)^{3/2}, \quad \text{definiendo } x = \frac{\Delta r}{r} \ll 1, \text{ aproximamos,} \\ T + \Delta T &\approx \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} \left(1 + \frac{3\Delta r}{2r} \right) = T + \frac{3\pi r^{1/2} \Delta r}{\sqrt{GM_T}}, \quad \text{usando la expresión para } v \\ \text{resulta: } \Delta T &= \frac{3\pi \Delta r}{v}. \end{aligned} \tag{11}$$

Por otro lado, el incremento Δr en la órbita produce un cambio en el valor de v :

$$\begin{aligned} v(r + \Delta r) &= \sqrt{GM_T} (r + \Delta r)^{-1/2} = \sqrt{GM_T} r^{-1/2} \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right)^{-1/2} \\ &\approx \sqrt{GM_T} r^{-1/2} \left(1 - \frac{\Delta r}{r} \right) = v - \frac{\sqrt{GM_T}}{2r^{3/2}} \Delta r, \quad \text{usando la expresión para } T \\ \text{resulta: } \Delta v &= -\frac{\pi \Delta r}{T}. \end{aligned} \tag{12}$$

De aquí vemos que un incremento Δr en el valor de la órbita, produce un incremento en el período y una disminución en la rapidez.

Item 4)

Comenzamos encontrando la rapidez y período de la órbita de la ISS, para eso usamos las definiciones de T y de v :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{6.7401 \times 10^6 \text{ m}}} = 7.692 \times 10^3 \text{ m/s} \tag{13}$$

$$\text{y } T = \frac{2\pi r}{v} = 5502 \text{ s} = 91.7 \text{ min.} \tag{14}$$

Ya que la órbita del transbordador Voyager y de la ISS difieren en un $\Delta r = 100\text{m}$, calculemos el valor de los incrementos en T y v :

$$\Delta T = \frac{3\pi\Delta r}{v} = \frac{3\pi(100\text{ m})}{7.692 \times 10^3\text{ m/s}} = 0.1224\text{ s} \quad (15)$$

$$\text{y } \Delta v = \frac{\pi\Delta r}{T} = \frac{\pi(100\text{ m})}{5502\text{ s}} = 0.05707\text{ m/s}. \quad (16)$$

Justo antes de que el cable se desconecte (se tense) de la ISS, las posiciones de la estación y de la nave satisfacen aproximadamente $(125\text{ m})^2 \approx d^2 + (100\text{ m})^2$ donde d se mide sobre la órbita de la ISS. Además, sabiendo que la velocidad lineal relativa entre la ISS y la nave es Δv , se tiene que $d = t_d\Delta v$ siendo t_d el tiempo de desconexión. Así tenemos que:

$$d = \sqrt{(125\text{ m})^2 - (100\text{ m})^2} = 75\text{ m}, \quad (17)$$

$$\text{y así: } t_d = \frac{75\text{ m}}{0.05707\text{ m/s}} = 1314.2\text{ s} \approx 22\text{ min}. \quad (18)$$

Item 5)

Si la nave no logra pescar el cable en su primer intento, la capitana deberá considerar si espera un próximo encuentro... veamos por qué.

Sabemos que la ISS se mueve más rápido que el transbordador espacial, por lo que el ángulo total que cubre en una órbita debe ser 2π radianes más que el ángulo que cubre el transbordador espacial antes de que vuelvan a estar alineados con la Tierra, es decir:

$$\frac{vt}{r} - \frac{(v - \Delta v)t}{r + \Delta r} = 2\pi. \quad (19)$$

Resolviendo para el valor del tiempo t , despreciando términos muy pequeños de orden $(\Delta v\Delta r)$:

$$\frac{vt}{r} - \frac{(v - \Delta v)t}{r} \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^{-1} \approx t \left(\frac{\Delta v}{r} + \frac{v\Delta r}{r^2}\right) = 2\pi, \quad (20)$$

de aquí tenemos:

$$t \approx \frac{2\pi r}{\left(\Delta v + \frac{v\Delta r}{r}\right)} \approx \frac{vT}{\frac{\pi\Delta r}{T} + \frac{v\Delta r}{r}}. \quad (21)$$

Como $2\pi r = vT$ y $\Delta r = \frac{v\Delta T}{3\pi}$, obtenemos:

$$t \approx \frac{vT}{\frac{\pi}{T} \left(\frac{v\Delta T}{3\pi}\right) + \frac{2\pi}{T} \left(\frac{v\Delta T}{3\pi}\right)} \approx \frac{T^2}{\Delta T}, \quad (22)$$

Item 6)

Colocando valores numéricos al resultado del ítem anterior encontramos:

$$t \approx \frac{T^2}{\Delta T} \approx \frac{(5502\text{ s})^2}{(0.1224\text{ s})} \approx 2.473 \times 10^8\text{ s} \approx 2862\text{ días} \approx 7.84\text{ años}.$$

Colisión de Agujeros negros y emisión de Ondas gravitacionales

Nivel 1

2021

El 14 de septiembre de 2015, la colaboración del Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Laser, LIGO, detectó radiación gravitacional proveniente de la colisión de dos agujeros negros ubicados a un billón de años luz de distancia de la Tierra (es decir que ocurrió hace un billón de años). Este descubrimiento constituyó la primera observación directa de radiación gravitacional casi cien años después de que Einstein la predijo y abrió una nueva ventana al universo.

Usaremos argumentos simples basados en mecánica y gravedad Newtoniana y Relatividad Especial, junto con datos recolectados por LIGO para estimar la masa total del sistema binario de agujeros negros y la porción de la energía inicial del sistema que es transportada por las ondas gravitacionales.

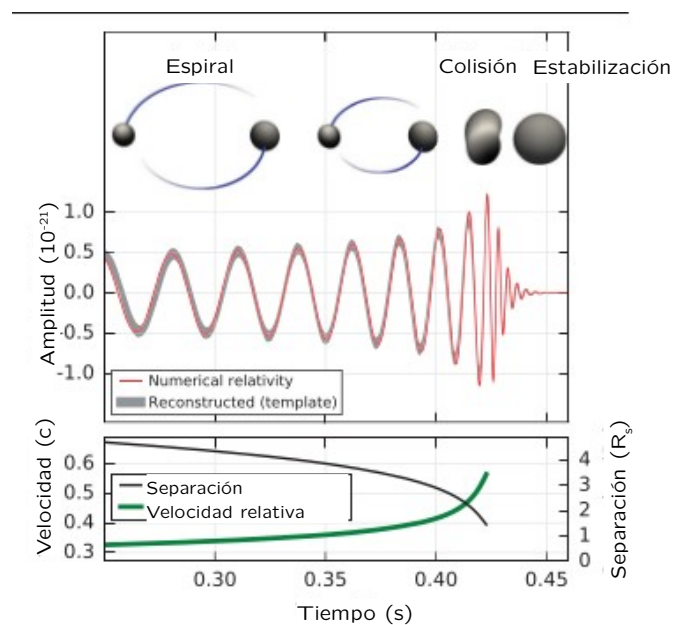


Figure 1: Las diferentes etapas de la colisión de agujeros negros. También se muestra la amplitud de la onda gravitacional detectada en Hanford, la separación efectiva Kepleriana y la velocidad relativa efectiva. [PRL 116, 061102 (2016)]

La colisión binaria de agujeros negros ocurre en tres etapas (ver Figura 1). Inicialmente, los agujeros negros orbitan alrededor de su centro de masa esencialmente en órbitas circulares. Durante esta

etapas pierden energía en forma de radiación gravitacional y sus órbitas se achican, formando un espiral convergente. En la segunda etapa, los agujeros negros colisionan. En la tercera etapa, de estabilización, el sistema se relaja a un estado de equilibrio que consiste de un único agujero negro estacionario.

Durante la primera etapa, los dos agujeros negros se pueden modelar como partículas puntuales de masas m_1 y m_2 , que se mueven alrededor de su centro de masa común en órbitas circulares de radios d_1 y d_2 respectivamente, con velocidad angular ω . Los agujeros negros permanecen en lados opuestos de la órbita, a una separación $d = d_1 + d_2$.

Pregunta 1: (1 punto)

El problema de dos masas puntuales m_1, m_2 ubicadas a distancias d_1, d_2 del centro de masa respectivamente, y sujetas sólo al campo gravitatorio de la otra masa puntual, es equivalente al problema de una masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ubicada a una distancia $d = d_1 + d_2$ de una masa puntual fija $M = m_1 + m_2$. Teniendo en cuenta que la aceleración centrípeta de la masa reducida es

$$a = \omega^2 d \tag{1}$$

y que la masa reducida μ siente la fuerza gravitatoria producida por la masa M , determine la velocidad angular ω en términos de la separación entre los agujeros negros, sus masas y la constante de gravitación universal G .

Solución 1: La fuerza Gravitatoria que siente la masa reducida es

$$F = \frac{G\mu M}{d^2} \tag{2}$$

por lo tanto, por la segunda Ley de Newton para la masa reducida tenemos

$$F = \mu a \tag{3}$$

$$\frac{G\mu(m_1 + m_2)}{d^2} = \mu\omega^2 d \tag{4}$$

y obtenemos la velocidad angular como

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}} \tag{5}$$

Pregunta 2: (1 punto)

Encuentre las distancias d_1, d_2 entre los agujeros negros y el centro de masas en términos de la separación $d = d_1 + d_2$ y las masas m_1, m_2 .

Solución 2:

Usando que

$$m_1 d_1 - m_2 d_2 = 0 \quad m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{6}$$

Sumando a ambos miembros la cantidad $m_1 d_2$ tenemos

$$m_1 d = (m_1 + m_2) d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

Y sumando a ambos miembros la cantidad m_2d_1 tenemos

$$(m_1 + m_2)d_1 = m_2d \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{m_2d}{m_1 + m_2} \quad (8)$$

Tenemos entonces

$$d_1 = \frac{m_2d}{m_1 + m_2} \quad d_2 = \frac{m_1d}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

Pregunta 3: (1 punto)

Muestre que el momento de inercia I del sistema de agujeros negros con respecto al centro de masa se puede escribir en términos de las masas y la distancia entre los agujeros negros d como

$$I = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}d^2 \quad (10)$$

Solución 3: El momento de inercia es

$$I = m_1d_1^2 + m_2d_2^2 \quad (11)$$

Usando los resultados del ítem anterior

$$d_1 = \frac{m_2d}{m_1 + m_2} \quad d_2 = \frac{m_1d}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

los reemplazamos en (11) y nos queda

$$I = m \left(\frac{m_2d}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1d}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (13)$$

$$I = \frac{(m_1m_2^2 + m_2m_1^2)}{(m_1m_2)^2}d^2 \quad (14)$$

$$I = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}d^2 \quad (15)$$

Pregunta 4: (1 punto)

En la teoría de la Relatividad Especial de Einstein, un cuerpo de masa m posee un tipo de energía independiente de su movimiento y su posición, llamada Energía en reposo y cuyo valor es

$$E_{\text{reposo}} = mc^2 \quad (16)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Encuentre la energía total del sistema, como suma de las energías en reposo de los agujeros negros, la energía cinética y la energía potencial gravitatoria del sistema. Exprésela en términos de las masas, la separación d , la constante de gravitación G y la velocidad de la luz c .

Supondremos que la Mecánica Newtoniana y la ley de gravitación de Newton son válidas para el cálculo de la energía cinética y potencial del sistema.

Solución 4:

$$E_{tot} = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{Gm_1m_2}{d} \quad (17)$$

$$E_{tot} = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} d^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3} - \frac{Gm_1m_2}{d} \quad (18)$$

$$E_{tot} = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2} \frac{Gm_1m_2}{d} - \frac{Gm_1m_2}{d} \quad (19)$$

$$E_{tot} = (m_1 + m_2)c^2 - \frac{1}{2} \frac{Gm_1m_2}{d} \quad (20)$$

Pregunta 5: (1 punto)

Los agujeros negros no son masas puntuales y su tamaño es relevante cuando los agujeros están a punto de tocarse. Usando que la velocidad de escape de los agujeros negros es c , determine los radios R_1 y R_2 de cada agujero negro en términos de sus respectivas masas, de G y c . (Recuerde que la velocidad de escape de un cuerpo se define como la mínima velocidad que se debe impartir a una partícula puntual en la superficie del cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de un cuerpo, es decir, para que la partícula llegue al infinito con velocidad cero.)

Solución 5: La velocidad de escape de un cuerpo de masa m y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2mG}{R}}, \quad R = \frac{2mG}{v_{esc}^2} \quad (21)$$

Para los agujeros negros tenemos

$$r_1 = \frac{2m_1G}{c^2}, \quad r_2 = \frac{2m_2G}{c^2} \quad (22)$$

Pregunta 6: (1 punto)

Determine la energía total del sistema en el momento en que los agujeros negros entran en contacto. Exprésela en términos de las masas m_1, m_2 y c .

Solución 6: Cuando los agujeros negros se tocan, la separación es

$$d = r_1 + r_2 = \frac{2(m_1 + m_2)G}{c^2} \quad (23)$$

Y la energía total en ese momento es

$$E_{tot} = (m_1 + m_2)c^2 - \frac{1}{4} \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)} c^2 \quad (24)$$

Pregunta 7: (1 punto)

A medida que los agujeros negros se acercan en su movimiento orbital, la velocidad angular crece. Determine la velocidad angular de los agujeros al momento de la colisión en términos de las masas de los agujeros negros, c y G .

Solución 7: Al momento de la colisión, la separación entre los centros de los agujeros negros es $d = \frac{2(m_1+m_2)G}{c^2}$. Por la ley de Kepler tenemos la velocidad angular como

$$\omega_{choque} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)c^6}{8(m_1 + m_2)^3 G^3}} \quad (25)$$

$$\omega_{choque} = \frac{c^3}{\sqrt{8}(m_1 + m_2)G} \quad (26)$$

Pregunta 8: (1 punto)

En la Figura 2 se muestran las mediciones de las ondas gravitacionales obtenidas por LIGO en Hanford y en Livingston generadas por la colisión de dos agujeros negros. A partir de estos gráficos estime el momento t_{choque} en que se produce el choque entre los agujeros negros y la frecuencia f_{choque} registrada en dicho momento.

Solución 8: Podemos decir que la colisión ocurre cuando la señal de las ondas gravitacionales es más intensa, ya que luego, el sistema decae y se estabiliza. En el gráfico esto corresponde a las regiones amarillas. De los gráficos estimamos

$$t_{choque} \approx 0.44s, \quad f_{choque} \approx 150 \text{ Hz} \quad (27)$$

Pregunta 9: (1 punto)

Teniendo en cuenta que la frecuencia f se relaciona con velocidad angular ω mediante $\omega = 2\pi f$, indique la masa total del sistema binario medido por LIGO. Expresé el valor en masas solares (1 masa solar es $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{kg}$).

Solución 9:

Al momento del choque tenemos $\omega_{choque} = 2\pi \cdot 150 \text{ Hz} = 942.5 \text{ Hz}$.

Vimos que

$$\omega_{choque} = \frac{c^3}{\sqrt{8}(m_1 + m_2)G} \quad (28)$$

por lo que la masa del sistema binario es

$$m_1 + m_2 = \frac{c^3}{\sqrt{8}\omega_{choque}G} \quad (29)$$

$$m_1 + m_2 = \frac{(3 \times 10^8)^3}{\sqrt{8} \times 942.5 \times 6.6 \times 10^{-11}} \text{ kg} \quad (30)$$

$$m_1 + m_2 = 1.5 \times 10^{32} \text{ kg} \quad (31)$$

es decir

$$m_1 + m_2 = 75M_{\odot} \quad (32)$$

Pregunta 10: (1 punto)

Los científicos de LIGO encontraron una masa total de $m_1 + m_2 = 65M_{\odot}$. Indique el error porcentual de la estimación encontrada en el ítem anterior.

Solución 10:

El error porcentual es

$$e = \frac{75 - 65}{65} \times 100 = 15\% \quad (33)$$

Datos:

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Constante de gravitación universal: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^{-2}$.

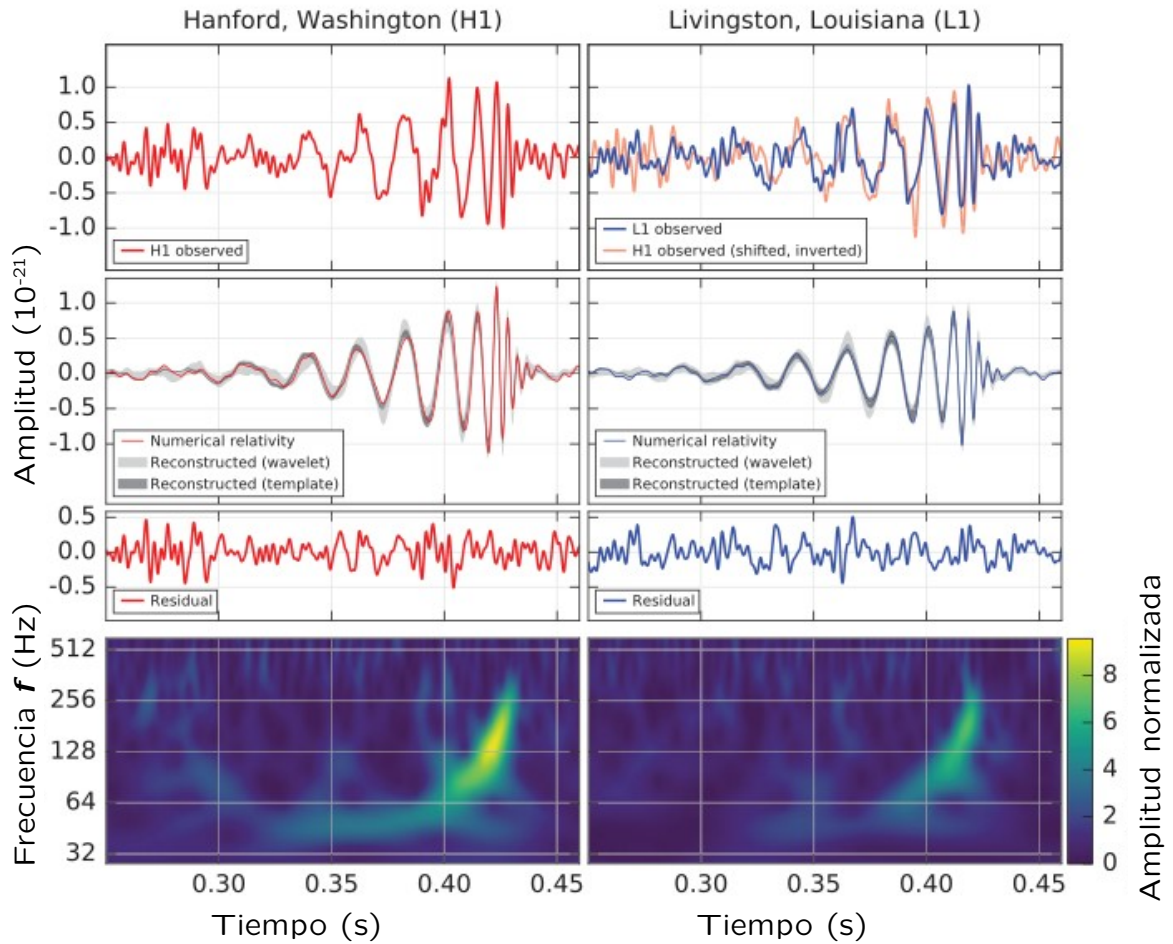


Figure 2: El evento GW150914 observado por los detectores LIGO Hanford (paneles izquierdos) y Livingston (paneles derechos). La primera fila muestra la amplitud de de la onda gravitacional. La segunda fila muestra la señal filtrada y comparada con la simulación numérica. La tercera fila muestra la diferencia entre la medición y la simulación numérica. La cuarta fila es una representación tiempo-frecuencia de los datos, mostrando que la frecuencia de la señal crece en el tiempo. Además, la escala de colores indica la amplitud de la señal, creciendo desde los azules hasta los amarillos. [PRL 116, 061102 (2016)]

Colisión de Agujeros negros y emisión de Ondas gravitacionales

Nivel 1

2021

El 14 de septiembre de 2015, la colaboración del Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Laser, LIGO, detectó radiación gravitacional proveniente de la colisión de dos agujeros negros ubicados a un billón de años luz de distancia de la Tierra (es decir que ocurrió hace un billón de años). Este descubrimiento constituyó la primera observación directa de radiación gravitacional casi cien años después de que Einstein la predijo y abrió una nueva ventana al universo.

Usaremos argumentos simples basados en mecánica y gravedad Newtoniana y Relatividad Especial, junto con datos recolectados por LIGO para estimar la masa total del sistema binario de agujeros negros y la porción de la energía inicial del sistema que es transportada por las ondas gravitacionales.

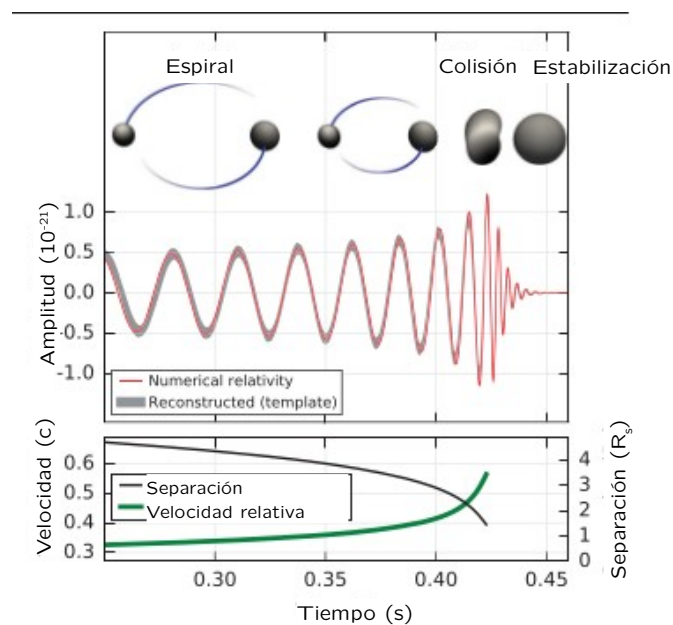


Figure 1: Las diferentes etapas de la colisión de agujeros negros. También se muestra la amplitud de la onda gravitacional detectada en Hanford, la separación efectiva Kepleriana y la velocidad relativa efectiva. [PRL 116, 061102 (2016)]

La colisión binaria de agujeros negros ocurre en tres etapas (ver Figura 1). Inicialmente, los agujeros negros orbitan alrededor de su centro de masa esencialmente en órbitas circulares. Durante esta

etapa pierden energía en forma de radiación gravitacional y sus órbitas se achican, formando un espiral convergente. En la segunda etapa, los agujeros negros colisionan. En la tercera etapa, de estabilización, el sistema se relaja a un estado de equilibrio que consiste de un único agujero negro estacionario.

Durante la primera etapa, los dos agujeros negros se pueden modelar como partículas puntuales de masas m_1 y m_2 , que se mueven alrededor de su centro de masa común en órbitas circulares de radios d_1 y d_2 respectivamente, con velocidad angular ω . Los agujeros negros permanecen en lados opuestos de la órbita, a una separación $d = d_1 + d_2$.

Pregunta 1: (1 punto)

El problema de dos masas puntuales m_1, m_2 ubicadas a distancias d_1, d_2 del centro de masa respectivamente, y sujetas sólo al campo gravitatorio de la otra masa puntual, es equivalente al problema de una masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ubicada a una distancia $d = d_1 + d_2$ de una masa puntual fija $M = m_1 + m_2$. Teniendo en cuenta que la aceleración centrípeta de la masa reducida es

$$a = \omega^2 d \tag{1}$$

y que la masa reducida μ siente la fuerza gravitatoria producida por la masa M , determine la velocidad angular ω en términos de la separación entre los agujeros negros, sus masas y la constante de gravitación universal G .

Solución 1: La fuerza Gravitatoria que siente la masa reducida es

$$F = \frac{G\mu M}{d^2} \tag{2}$$

por lo tanto, por la segunda Ley de Newton para la masa reducida tenemos

$$F = \mu a \tag{3}$$

$$\frac{G\mu(m_1 + m_2)}{d^2} = \mu\omega^2 d \tag{4}$$

y obtenemos la velocidad angular como

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}} \tag{5}$$

Pregunta 2: (1 punto)

Muestre que el momento de inercia I del sistema de agujeros negros con respecto al centro de masa se puede escribir en términos de las masas y la distancia entre los agujeros negros d como

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 \tag{6}$$

Solución 2: El momento de inercia es

$$I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 \tag{7}$$

Usando Usando que

$$m_1 d_1 - m_2 d_2 = 0 \quad m_1 d_1 = m_2 d_2 \quad (8)$$

Sumando a ambos miembros la cantidad $m_1 d_2$ tenemos

$$m_1 d = (m_1 + m_2) d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

Y sumando a ambos miembros la cantidad $m_2 d_1$ tenemos

$$(m_1 + m_2) d_1 = m_2 d \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

Reemplazando en (7) nos queda

$$I = m \left(\frac{m_2 d}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (11)$$

$$I = \frac{(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2)}{(m_1 + m_2)^2} d^2 \quad (12)$$

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 \quad (13)$$

Pregunta 3: (1 punto)

En la teoría de la Relatividad Especial de Einstein, un cuerpo de masa m posee un tipo de energía independiente de su movimiento y su posición, llamada Energía en reposo y cuyo valor es

$$E_{\text{reposo}} = mc^2 \quad (14)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Encuentre la energía total del sistema, como suma de las energías en reposo de los agujeros negros, la energía cinética y la energía potencial gravitatoria del sistema. Exprésela en términos de las masas, la separación d , la constante de gravitación G y la velocidad de la luz c .

Supondremos que la Mecánica Newtoniana y la ley de gravitación de Newton son válidas para el cálculo de la energía cinética y potencial del sistema.

Solución 3:

$$E_{\text{tot}} = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{Gm_1 m_2}{d} \quad (15)$$

$$E_{\text{tot}} = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3} - \frac{Gm_1 m_2}{d} \quad (16)$$

$$E_{\text{tot}} = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{d} - \frac{Gm_1 m_2}{d} \quad (17)$$

$$E_{\text{tot}} = (m_1 + m_2)c^2 - \frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{d} \quad (18)$$

Pregunta 4: (1 punto)

Los agujeros negros no son masas puntuales y su tamaño es relevante cuando los agujeros están a punto de tocarse. Usando que la velocidad de escape de los agujeros negros es c , determine los radios R_1 y R_2 de cada agujero negro en términos de sus respectivas masas, de G y c . (Recuerde que la velocidad de escape de un cuerpo se define como la mínima velocidad que se debe impartir a una partícula puntual en la superficie del cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de un cuerpo, es decir, para que la partícula llegue al infinito con velocidad cero.)

Solución 4: La velocidad de escape de un cuerpo de masa m y radio R es

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2mG}{R}}, \quad R = \frac{2mG}{v_{esc}^2} \quad (19)$$

Para los agujeros negros tenemos

$$r_1 = \frac{2m_1G}{c^2}, \quad r_2 = \frac{2m_2G}{c^2} \quad (20)$$

Pregunta 5: (1 punto)

Determine la energía total del sistema en el momento en que los agujeros negros entran en contacto. Exprésela en términos de las masas m_1, m_2 y c .

Solución 5: Cuando los agujeros negros se tocan, la separación es

$$d = r_1 + r_2 = \frac{2(m_1 + m_2)G}{c^2} \quad (21)$$

Y la energía total en ese momento es

$$E_{tot} = (m_1 + m_2)c^2 - \frac{1}{4} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} c^2 \quad (22)$$

Pregunta 6: (1 punto)

A medida que los agujeros negros se acercan en su movimiento orbital, la velocidad angular crece. Determine la velocidad angular de los agujeros al momento de la colisión en términos de las masas de los agujeros negros, c y G .

Solución 6: Al momento de la colisión, la separación entre los centros de los agujeros negros es $d = \frac{2(m_1+m_2)G}{c^2}$. Por la ley de Kepler tenemos la velocidad angular como

$$\omega_{choque} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)c^6}{8(m_1 + m_2)^3 G^3}} \quad (23)$$

$$\omega_{choque} = \frac{c^3}{\sqrt{8(m_1 + m_2)G}} \quad (24)$$

Pregunta 7: (1 punto)

En la Figura 2 se muestran las mediciones de las ondas gravitacionales obtenidas por LIGO en Hanford y en Livingston generadas por la colisión de dos agujeros negros. A partir de estos gráficos estime el momento t_{choque} en que se produce el choque entre los agujeros negros y la frecuencia f_{choque} registrada en dicho momento.

Solución 7: Podemos decir que la colisión ocurre cuando la señal de las ondas gravitacionales es más intensa, ya que luego, el sistema decae y se estabiliza. En el gráfico esto corresponde a las regiones amarillas. De los gráficos estimamos

$$t_{choque} \approx 0.44s, \quad f_{choque} \approx 150 \text{ Hz} \quad (25)$$

Pregunta 8: (1 punto)

Teniendo en cuenta que la frecuencia f se relaciona con velocidad angular ω mediante $\omega = 2\pi f$, indique la masa total del sistema binario medido por LIGO. Expresé el valor en masas solares (1 masa solar es $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$).

Solución 8:

Al momento del choque tenemos $\omega_{choque} = 2\pi \cdot 150 \text{ Hz} = 942.5 \text{ Hz}$.

Vimos que

$$\omega_{choque} = \frac{c^3}{\sqrt{8}(m_1 + m_2)G} \quad (26)$$

por lo que la masa del sistema binario es

$$m_1 + m_2 = \frac{c^3}{\sqrt{8}\omega_{choque}G} \quad (27)$$

$$m_1 + m_2 = \frac{(3 \times 10^8)^3}{\sqrt{8} \times 942.5 \times 6.6 \times 10^{-11}} \text{ kg} \quad (28)$$

$$m_1 + m_2 = 1.5 \times 10^{32} \text{ kg} \quad (29)$$

es decir

$$m_1 + m_2 = 75M_{\odot} \quad (30)$$

Pregunta 9: (1 punto)

Los científicos de LIGO encontraron una masa total de $m_1 + m_2 = 65M_{\odot}$. Indique el error porcentual de la estimación encontrada en el ítem anterior.

Solución 9:

El error porcentual es

$$e = \frac{75 - 65}{65} \times 100 = 15\% \quad (31)$$

Pregunta 10: (0.5 puntos)

Para el sistema anterior, se encontró que las masas de los agujeros negros eran $m_1 = 29M_{\odot}$ y $m_2 = 36M_{\odot}$. Para el siguiente ítem, por simplicidad, supondremos que las masas de los agujeros negros son iguales, es decir, tomamos $m_1 = m_2$.

Escriba la energía total $E_{tot,i}$ justo en el momento antes de la colisión para el caso en que cada agujero tiene masa igual a m .

Escriba la energía total $E_{tot,f}$ justo después de la colisión, suponiendo que como resultado, se forma un agujero negro estático de masa m_f .

Solución 10:

Antes de la colisión tenemos $m_1 = m_2 = m$ y $d = r_1 + r_2 = R_1 + R_2 = 4mG/c^2$

$$E_{tot,i} = (m_1 + m_2)c^2 - \frac{1}{2} \frac{Gm_1m_2}{d} \quad (32)$$

$$E_{tot,i} = 2mc^2 - \frac{1}{2} \frac{Gm^2c^2}{4mG} \quad (33)$$

$$E_{tot,i} = \frac{15}{8}mc^2 \quad (34)$$

Justo después el choque tenemos que el agujero negro sólo posee energía en reposo.

$$E_{tot,f} = m_f c^2 \quad (35)$$

Pregunta 11: (0.5 puntos)

La entropía S de un agujero negro está relacionada con su masa M mediante la expresión

$$S = sM \quad (36)$$

donde s es una constante relacionada con constantes universales. La entropía de las ondas gravitacionales es despreciable con relación a la entropía de los agujeros negros.

Teniendo en cuenta el segundo principio de la termodinámica, indique cuál es el porcentaje máximo de la energía inicial que el sistema puede perder en forma de ondas gravitacionales durante el choque.

Solución 11:

El segundo principio de la termodinámica dice que la entropía es no decreciente en cada proceso. En el proceso de colisión, tenemos

$$S_f \geq S_i \quad (37)$$

Las entropías inicial y final son

$$S_i = s2m^2, \quad S_f = sm_f^2 \quad (38)$$

donde m_f es la masa del agujero negro que resulta de la colisión. Entonces

$$sm_f^2 \geq s2m^2 \quad (39)$$

$$m_f \geq \sqrt{2}m \quad (40)$$

$$m_f c^2 \geq \sqrt{2}mc^2 \quad (41)$$

$$E_{tot,f} \geq \sqrt{2} \frac{8}{15} E_{tot,i} \quad (42)$$

por lo que el porcentaje máximo de la energía inicial que se puede perder como radiación de ondas gravitacionales es

$$\text{porcentaje max} = \frac{E_{tot,i} - \sqrt{2} \frac{8}{15} E_{tot,i}}{E_{tot,i}} 100 = 24\% \quad (43)$$

Datos:

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$.

Constante de gravitación universal: $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^{-2}$.

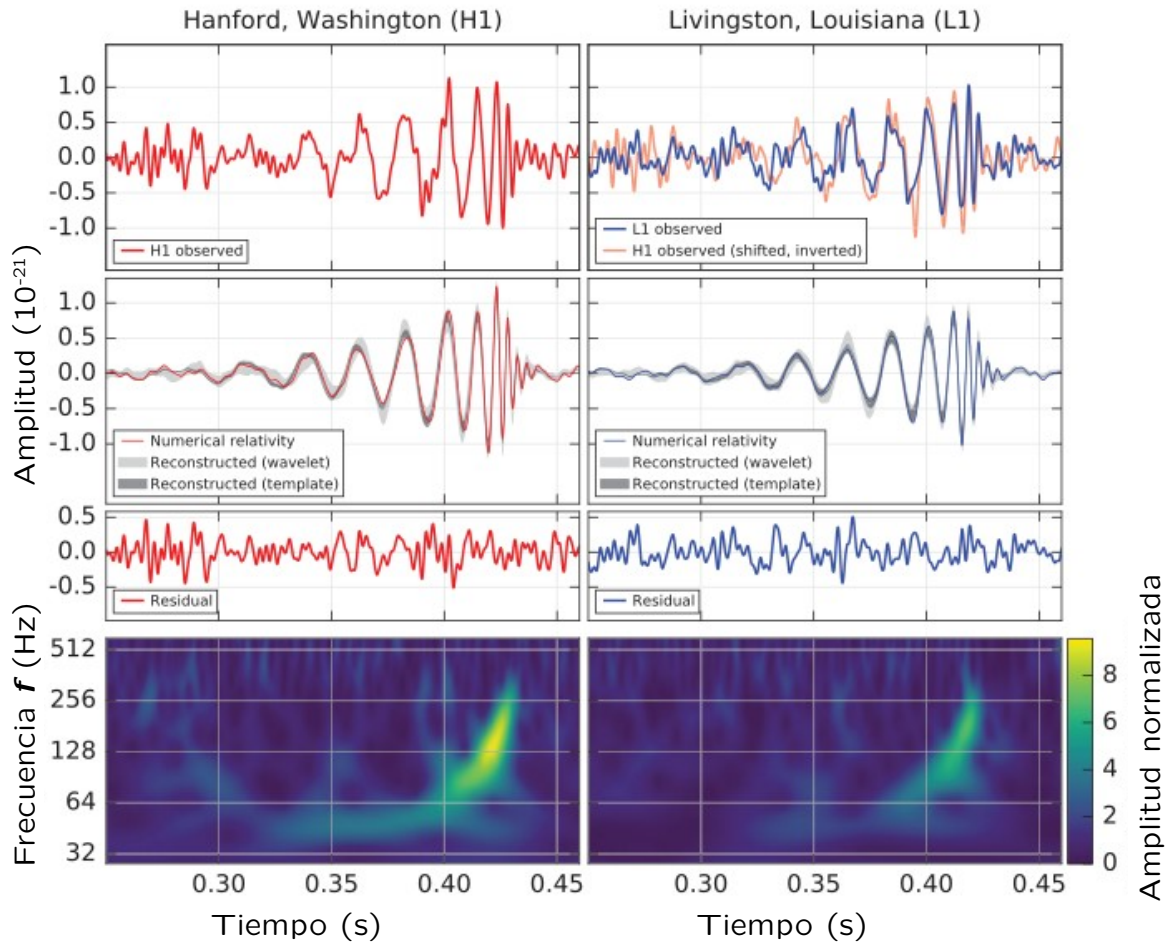


Figure 2: El evento GW150914 observado por los detectores LIGO Hanford (paneles izquierdos) y Livingston (paneles derechos). La primera fila muestra la amplitud de de la onda gravitacional. La segunda fila muestra la señal filtrada y comparada con la simulación numérica. La tercera fila muestra la diferencia entre la medición y la simulación numérica. La cuarta fila es una representación tiempo-frecuencia de los datos, mostrando que la frecuencia de la señal crece en el tiempo. Además, la escala de colores indica la amplitud de la señal, creciendo desde los azules hasta los amarillos. [PRL 116, 061102 (2016)]