Solución del Problema 1

Si consideramos que la velocidad de caída es constante, la fuerza de gravedad debe equilibrarse exactamente con la fuerza de resistencia, de modo que

$$mg = cv^{\gamma} \qquad \text{(RE2.1)} \qquad \textbf{[1]}$$

Si aplicamos logaritmo decimal a ambos miembros y transformamos, tenemos:

$$\lg(v) = \frac{1}{\gamma}\lg(m) + \frac{1}{\gamma}\lg\left(\frac{g}{c}\right) \qquad \text{(RE2.2)}$$

Para lograr varios valores de la fuerza de resistencia sin que cambie la constante c , podemos insertar los moldes uno dentro del otro de manera que el valor de la masa se multiplique por el número de moldes colocados. Con ello, las diferencias en la resistencia al movimiento ofrecida por el aire sólo dependerán de la velocidad de caída.

Como sólo podemos medir tiempo necesitamos rescribir la ecuación anterior en función de los tiempos de caída para una altura H fija. Así:

$$\lg(T_n) = -\frac{1}{\gamma}\lg(n) - \frac{1}{\gamma}\lg\left(\frac{mg}{c}\right) + \lg H \qquad \text{(RE2.3)} \qquad \textbf{[2]}$$

donde n es el número de moldes insertados uno dentro de otro, T_n es el tiempo que demora en caer el paquete de n moldes, y m es la masa de cada uno de ellos, considerados iguales entre sí.

Medición

La medición se ha realizado para una altura de 1.90 m. Los tiempos de caída en cada caso se muestran en las tablas. Los tiempos T_1, T_2 y T_3 corresponden a la caída de uno, dos y tres capacillos respectivamente. Además, en las tablas se han incluido los valores medios, así como la desviación standard para T_1, T_2 y T_3.

En la figura 1 se muestra el gráfico con el valor de la pendiente. De aquí se obtiene γ = 1.84.

T_1(s)	$\langle T_1 \rangle$(s)	Desviación Standard σ (s)	δT (s)
2.51	2.51	0.089	0.02
2.50			
2.53			
2.41			
2.50			
2.47			
2.59			
2.40			
2.46			
2.47			
2.40			
2.46			
2.50			
2.44			
2.60			
2.63			
2.57			
2.62			
2.47			
2.75			

T_2(s)	$\langle T_2 \rangle$(s)	Desviación Standard σ (s)	δT (s)
1.72	1.70	0.058	0.012
1.71			
1.63			
1.75			
1.72			
1.62			
1.75			
1.71			
1.75			
1.75			
1.72			
1.69			
1.72			
1.66			
1.59			
1.59			
1.62			
1.59			
1.66			
1.66			

T_3(s)	$\langle T_3 \rangle$(s)	Desviación Standard σ (s)	δT (s)
1.31	1.38	0.046	0.010
1.38			
1.41			
1.41			
1.31			
1.38			
1.38			
1.38			
1.37			
1.34			
1.34			
1.41			
1.32			
1.44			
1.40			
1.48			
1.44			
1.47			
1.44			
1.37			

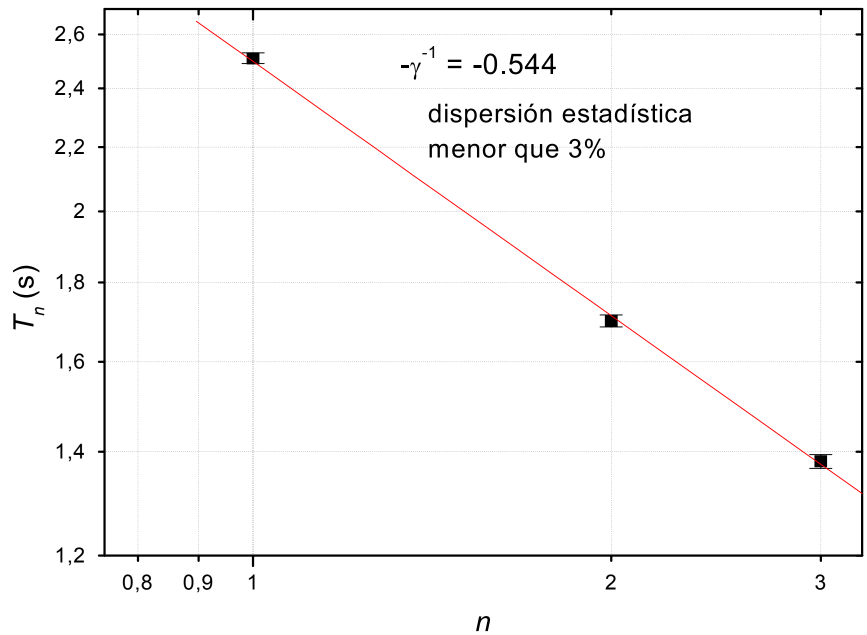

Figura RE2.1: Gráfico en escala log-log que muestra la dependencia potencial del tiempo de caída con el número de moldes. Las barras de error en el gráfico corresponden al error total para los tiempos.

Teoría de errores

En las tablas, la desviación standard ha sido calculada como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i \left(m_i - \langle m \rangle\right)^2}{9}} \qquad \text{donde} \qquad \langle m \rangle = \frac{1}{n}\sum_i x_i \qquad \text{(RE2.4)}$$

mientras que el error aleatorio ha sido calculado como

$$\delta m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(RE2.5)}$$

El error total de la medición está dado por

$$E = \sqrt{{e_T}^2 + \delta T^2} \qquad \text{(RE2.6)}$$

donde $e_T = 0.01\ s$. Así, los errores totales para cada masa, valen

E_{T1} = 0.02 s
E_{T2} = 0.015 s
E_{T3} = 0.014 s

Determinemos las cotas máximas de errores del exponente γ. Así,

$$\gamma = \frac{\log \dfrac{m_3}{m_1}}{\log\left(\dfrac{T_1}{T_3}\right)} \qquad \text{(RE2.7)}$$

Como el error de la masa es despreciable, podemos considerar sólo el segundo término. El incremento será:

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{m_3}{m_1}\left\{\frac{1}{\ln\dfrac{T_1-\Delta T_1}{T_3+\Delta T_3}} - \frac{1}{\ln\dfrac{T_1+\Delta T_1}{T_3-\Delta T_3}}\right\} \qquad \text{(RE2.8)}$$

Evaluando obtenemos el valor de la cota máxima de error para γ :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\left\{\dfrac{1}{\ln\dfrac{T_3-\Delta T_3}{T_1+\Delta T_1}} - \dfrac{1}{\ln\dfrac{T_3+\Delta T}{T_1-\Delta T_1}}\right\}}{\ln\dfrac{T_3}{T_1}} \qquad \text{(RE2.9)}$$

Sustituyendo para los valores extremos del gráfico, o sea, para T_1 y T_3 , tendremos:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 0.086$$

Así que podemos expresar el valor medido del exponente como $\gamma = 1.84 \pm 0.16$ ($\pm$ 9 %)