Respuestas al problema 1

Respuesta al problema 1.1

Consideremos el caso en que la puerta se libera a partir de su máxima apertura (o sea, el ángulo de la misma respecto al marco es $\theta_{max} = 90^o$). Planteando la ley de conservación de la energía en este caso tenemos que:

$$mgh_1 - mgh_2 = mg\Delta h_{12} = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega_2^{\ 2} \qquad \text{(R1.1.1)} \quad \textbf{[0.6]}$$

donde los subíndices "1" y "2" se refieren a los momentos en que la puerta está abierta al máximo, y un instante antes de cerrarse completamente, respectivamente. Los símbolos h, v y ω corresponden a la altura del centro de masa de la botella con agua, a la velocidad lineal de la parte de la puerta más alejada de las bisagras, y a la velocidad angular de la puerta, respectivamente. Por su parte, el momento de inercia de la puerta, I, se puede calcular mediante el teorema de Steiner como

$$I = \frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{3}Md^2 \qquad \text{(R1.1.2)} \quad \textbf{[0.4]}$$

donde M representa la masa de la puerta. Igualmente, es fácil ver que

$$\Delta h_{12} = \sqrt{2}\,d \qquad \text{(R1.1.3)} \quad \textbf{[0.4]}$$

pues el descenso de la botella debe ser igual a la longitud de hilo que se desliza por los aros desde el inicio del movimiento hasta el momento en que la puerta se cierra. Sustituyendo (R1.1.2), y (R1.1.3) en (R1.1.1), y recordando que $v_2 = \omega_2 d$, obtenemos:

$$\sqrt{2}mgd = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}M\right)v_2^{\ 2} \approx \frac{1}{6}Mv_2^{\ 2} \qquad \text{(R1.1.4)} \quad \textbf{[0.2]}$$

Por otra parte, la masa de la puerta se puede expresar como

$$M = \rho wld \qquad \text{(R1.1.5)} \quad \textbf{[0.2]}$$

donde ρ es la densidad del vidrio. Sustituyendo (R1.1.5) en (R1.1.4) y despejando la velocidad, queda:

$$v_2 = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}mg}{\rho wl}} \qquad \text{(R1.1.6)} \quad \textbf{[0.2]}$$

Para que no se rompa el vidrio, esta velocidad debe ser menor que v_{max}:

$$v_{max} = \frac{v_0}{ld} > v_2 = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}mg}{\rho wl}} \qquad \text{(R1.1.7)} \quad \textbf{[0.2]}$$

Despejando d en (R1.1.7) obtenemos la condición del ancho de la puerta para que el vidrio nunca se astille:

$$d < \frac{v_0}{l}\sqrt{\frac{\rho wl}{6\sqrt{2}mg}} \qquad \text{(R1.1.8)} \quad \textbf{[0.6]}$$

Sustituyendo los valores numéricos de nuestro problema, queda:

$$d < 1.6\ \text{m} \qquad \text{(R1.1.9)} \quad \textbf{[0.2]}$$

Respuesta al problema 1.2

Planteando la ley de conservación de energía mecánica para la botella entre el instante inmediatamente posterior a que la puerta toque el marco (posición 2), y el momento en que al hilo se ha estirado al máximo (posición 3):

$$\frac{1}{2}mv_2^{\,2} + mgh_2 = mgh_3 + \frac{1}{2}k\Delta h_{23}^{\,2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + mg\Delta h_{23} = \frac{1}{2}k\Delta h_{23}^{\,2} \qquad \text{(R1.2.1)} \quad \mathbf{[1.2]}$$

Sustituyendo (R1.1.6) en (R1.2.1), y estableciendo la condición de ruptura $T_{\max} = k\Delta h_{23}$,**[0.4]** queda:

$$\frac{3\sqrt{2}g}{\rho wl}m_{\max}^{\,2} + \frac{g}{k}T_{\max}m_{\max} - \frac{1}{2k}T_{\max}^{\,2} = 0 \qquad \text{(R1.2.2)} \quad \mathbf{[0.5]}$$

Resolviendo esta ecuación para la masa de la botella, queda:

$$m = T_{\max}\frac{\rho wl}{6\sqrt{2}k}\left\{\sqrt{1+\frac{6\sqrt{2}k}{g\rho wl}} - 1\right\} \qquad \text{(R1.2.3)} \quad \mathbf{[1.2]}$$

Sustituyendo valores numéricos, queda:

$$m = 2.0\,\mathrm{kg} \qquad \text{(R1.2.4)} \quad \mathbf{[0.2]}$$

Respuesta al ejercicio 1.3

Como la apertura de la puerta es pequeña comparada con su ancho, podemos considerar que el hilo siempre es perpendicular a la puerta. Así la ecuación de movimiento de la puerta es

$$-Td = \frac{Md^2}{3}\ddot{\theta} \qquad \text{(R1.3.1)} \quad \mathbf{[0.8]}$$

Mientras que la de la botella que pende del hilo, es:

$$T - mg = m\ddot{h} \qquad \text{(R1.3.2)} \quad \mathbf{[0.8]}$$

Eliminando la tensión, T, entre las ecuaciones anteriores, queda:

$$-mg = \left(\frac{M}{3} + m\right)\ddot{h} \approx \frac{M}{3}\ddot{h} \qquad \text{(R1.3.3)} \quad \mathbf{[0.3]}$$

Por lo tanto, la botella desciende con aceleración angular constante

$$a = \ddot{h} = -\frac{3m}{M}g \qquad \text{(R1.3.4)} \quad \mathbf{[0.1]}$$

La ecuación cinemática que describe el movimiento de la puerta a partir del reposo, es:

$$\Delta h = \frac{1}{2}a\Delta t^2 \qquad \text{(R1.3.5)} \quad \mathbf{[0.8]}$$

donde Δh y Δt son, respectivamente, la longitud total de hilo que se desliza durante el movimiento (igual a la apertura de la puerta al inicio del movimiento), y su duración. Sustituyendo (R1.3.4) en (R1.3.5), y despejando Δt, se obtiene:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta hM}{3mg}} = \sqrt{\frac{2\Delta h\rho wld}{3mg}} \qquad \text{(R1.3.6)} \quad \mathbf{[0.5]}$$

Sustituyendo valores numéricos en esta expresión, obtenemos:

$$\Delta t = 0.5\,\mathrm{s} \qquad \text{(R1.3.7)} \quad \mathbf{[0.2]}$$

Obsérvese que este valor es demasiado pequeño a la luz del sentido común. Lo que ocurre es que, en condiciones reales, la fricción del hilo al deslizarse por los anillos no es despreciable, lo que tiende a aumentar el tiempo de cerrado.

Respuestas al problema 2

Respuesta al ejercicio 2.1

Si I es la corriente que escapa de la cinta a través de la cruceta en un instante dado durante la descarga, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre cada uno de los cuatro hilos de la cruceta, suponiendo que los cuatro hilos son idénticos, es:

$$F = \frac{I}{4} RB \qquad \text{(R2.1.1)} \quad \textbf{[1.0]}$$

Como la fuerza sobre cada hilo de la cruceta está uniformemente distribuida, ella puede considerarse aplicada en el centro de gravedad de cada hilo. De esta forma, el torque total que se ejerce sobre los cuatro hilos viene dado por:

$$\tau = 4F \cdot \frac{R}{2} = \frac{IR^2 B}{2} \qquad \text{(R2.1.2)} \quad \textbf{[1.0]}$$

La variación de momento angular que brinda este torque al péndulo de torsión en un breve intervalo de tiempo Δt vendrá dado por:

$$\Delta G = \frac{IR^2 B}{2} \Delta t \qquad \text{(R2.1.3)} \quad \textbf{[1.0]}$$

Teniendo en cuenta que $I\Delta t = \Delta Q$ **[1.0]**, donde ΔQ representa la pérdida de carga, se tiene que

$$\Delta G = \frac{R^2 B}{2} \Delta Q \qquad \text{(R2.1.3)}$$

O sea, que la variación del momento angular es proporcional a la pérdida de carga, por lo que el momento angular total que brinda la descarga vendrá dado por:

$$G = \frac{R^2 B}{2} Q \qquad \text{(R2.1.4)} \quad \textbf{[1.0]}$$

Respuesta al ejercicio 2.2

Del ejercicio anterior queda claro que,

$$MR^2 \omega = \frac{R^2 B}{2} Q \qquad \text{(R2.1.5)} \quad \textbf{[1.0]}$$

Donde ω es la velocidad angular de la cinta, y MR^2 es el momento de inercia de ella debido a que toda su masa se encuentra prácticamente a la misma distancia del eje de giro. La energía potencial del péndulo de torsión está dada por:

$$U = \frac{k\theta^2}{2} \qquad \text{(R2.1.6)} \quad \textbf{[0.2]}$$

donde θ es el ángulo de torsión del péndulo. Por otra parte, la máxima desviación angular ocurre cuando esta energía es igual a la energía cinética inicial. Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{k\theta^2}{2} = \frac{MR^2\omega^2}{2} \qquad \text{(R2.1.7)} \quad \textbf{[1.3]}$$

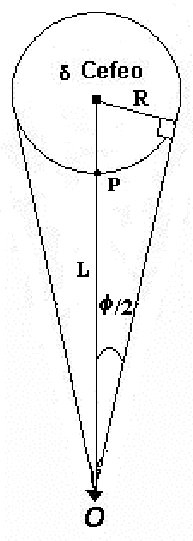
de donde sigue la respuesta:

$$\theta = \frac{RBQ}{2\sqrt{Mk}} \qquad \text{(R2.1.8)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Respuesta al ejercicio 2.3

El campo electromagnético que inicialmente ocupaba el espacio (campo magnético externo y campo eléctrico asociado a la carga eléctrica Q de la cinta) poseía inicialmente el momento angular que gana la cinta después de la descarga. El campo magnético, a través de la fuerza de Lorentz, proporciona momento angular a la cinta a costa de su propio momento angular. De manera que no se viola la conservación del momento angular para el sistema en su conjunto, incluyendo como parte del sistema, por supuesto, al campo electromagnético. En suma, la respuesta es “campo electromagnético”. **[2.0 puntos]**

Respuestas al problema 3



Respuesta al ejercicio 3.1

El radio R de la estrella está relacionado con el diámetro angular y la distancia a la estrella L según (simples consideraciones geométricas)

$$R = L\sin\frac{\phi}{2} \approx \frac{L\phi}{2}\,, \qquad \text{(R3.1.1)} \quad \textbf{[0.5]}$$

donde se tuvo en cuenta la pequeñez de los ángulos en consideración. Consecuentemente, la amplitud de la oscilación del radio ΔR_{max} de la estrella estará dada por

$$\Delta R_{max} = \frac{L\Delta\phi_{max}}{2}\,. \qquad \text{(R3.1.2)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Conociendo las características de los movimientos armónicos, tendremos que la velocidad máxima de expansión de la superficie de la estrella tendrá la expresión

$$v_{max} = \omega\Delta R_{max} = \frac{\pi L\Delta\phi_{max}}{\tau}\,, \qquad \text{(R3.1.3)} \quad \textbf{[2.5]}$$

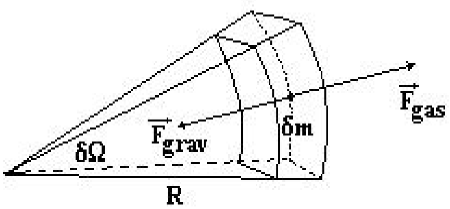
donde se tuvo en cuenta que $\omega = 2\pi/\tau$. Fórmulas para el efecto Doppler longitudinal demasiado estándares como para demostrar aquí dicen que

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{max}}{c}\,. \qquad \text{(R3.1.4)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Finalmente, hallamos

$$L = \frac{c\tau}{\pi\Delta\phi_{max}} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\,. \qquad \text{(R3.1.5)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Respuesta al ejercicio 3.2



Está claro que en el equilibrio

$$0 = P_0 \cdot \Omega \cdot R_0^2 - G\frac{Mm}{R_0^2}\,. \qquad \text{(R3.2.1)} \quad \textbf{[1.5]}$$

de donde

$$P_0 = G\frac{mM}{\Omega R_0^4} = \frac{GmM}{\Omega\phi_0^4 L^4} \qquad \text{(R3.2.2)} \quad \textbf{[0.5]}$$

sustituyendo (R3.1.5) en (R3.2.4) se llega a

$$P_0 = \frac{GmM}{\Omega}\left(\frac{\pi\Delta\phi_{\max}}{c\tau}\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^4 \qquad \text{(R3.2.3)} \quad \textbf{[1.0]}$$

Respuesta al ejercicio 3.3

La ecuación de movimiento para el pequeño volumen de gas que estamos considerando es solución de

$$m \cdot a = P \cdot \Omega \cdot R^2 - G\frac{Mm}{R^2}. \qquad \text{(R3.3.1)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Teniendo en cuenta que el volumen es proporcional al cubo de las dimensiones lineales y que en procesos adiabáticos PV^{γ} es constante, tendremos que $PR^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}$. De donde se sigue que

$$P = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3\gamma} P_0. \qquad \text{(R3.3.2)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Sustituyendo estos resultados y la expresión (R3.2.2) en la ecuación de movimiento se obtiene, después de eliminar el factor común en ambos miembros m,

$$a = G\frac{M}{R_0^2}\left\{\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^{2-3\gamma} - \left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^{-2}\right\}, \qquad \text{(R3.3.3)} \quad \textbf{[0.5]}$$

donde hemos definido $\Delta R = R - R_0$ la variación del radio de la estrella respecto al equilibrio. Teniendo en cuenta que esta variación es pequeña y utilizando la igualdad aproximada $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$ obtenemos

$$a = -G\frac{M}{R_0^3}(3\gamma - 4)\Delta R. \qquad \text{(R3.3.4)} \quad \textbf{[0.3]}$$

El coeficiente de ΔR en el segundo miembro es precisamente el cuadrado de la frecuencia buscada, o sea,

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R_0^3}(3\gamma - 4)}. \qquad \text{(R3.3.5)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Como ya vimos en la solución a la Pregunta 1, $R_0 = L\phi_0 / 2$, con lo cual

$$\omega = \sqrt{8G\frac{M}{\phi_0^3 L^3}(3\gamma - 4)}. \qquad \text{(R3.3.6)} \quad \textbf{[0.5]}$$

Teniendo en cuenta finalmente que $\omega = 2\pi / \tau$ y la expresión para L hallada en la Pregunta 3.1, encontramos para la masa de δ de Cefeo la expresión

$$M = \frac{1}{2\pi}\frac{c^3 {\phi_0}^3 \tau}{G(3\gamma - 4){\Delta\phi_{\max}}^3}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^3. \qquad \text{(R3.3.7)} \quad \textbf{[0.2]}$$