

1. Planeta-disco

(a) Fazendo as correspondências

$$\begin{aligned}q &\rightarrow m \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\rightarrow -G \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} &\rightarrow -G \frac{m_1 m_2}{r^2}\end{aligned}$$

Se, por um lado, para o campo eléctrico, se tem

$$\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$$

a forma da Lei de Gauss para o campo gravítico é

$$\Phi_g = -4\pi G m .$$

(b) Usando uma superfície gaussiana que contenha as duas superfícies do planeta (ver figura mais à frente, esquema 1))

$$\Phi_g = 2g(z) A$$

em que $g(z)$ é a componente z da aceleração da gravidade à altitude z e A é a área da base da superfície gaussiana (superfície cilíndrica, por exemplo). Como a massa no interior da superfície gaussiana é

$$\Delta m = \mu A$$

vem

$$2g(z) A = -4\pi G \mu A \quad \text{ou} \quad g(z) = -2\pi G \mu$$

de onde resulta

$$g(z) = -g_{Dw} = -2\pi G \mu .$$

O campo é uniforme e não varia com a distância à superfície (desde que a aproximação de planeta “sem espessura” seja razoável).

(c) Se o planeta tiver massa volúmica ρ , então $\mu = \rho d$, em que d é a espessura do planeta. Como

$$g_{Dw} = 2\pi G \rho_{Dw} d ,$$

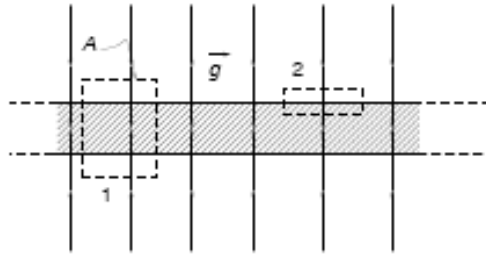
e sendo $g_{Dw} = g$ e $\rho_{Dw} = \rho_T = \rho$,

$$g = 2\pi G \rho d .$$

Por outro lado, à superfície da Terra, $g = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{4}{3}\pi R_T G \rho$. Inserindo na expressão

acima,

$$d = \frac{2}{3} R_T = 4,3 \times 10^6 \text{ m} .$$



(d) Usando novamente uma superfície de Gauss com uma base fora do planeta, onde o campo é $-g_{Dw}$ e a outra dentro e à distância z do plano central (figura acima, esquema 2), onde o campo é $-g(z)$, vem

$$\Phi = -g_{Dw} A - g(z) A.$$

A massa contida no interior da superfície de Gauss é $\Delta m = A\rho(d/2 - z)$ pelo que o fluxo de campo gravítico também é dado por

$$\Phi = -4\pi G A \rho \left(\frac{d}{2} - z \right).$$

Igualando agora as duas expressões obtidas para o fluxo, vem (notar que $g_{Dw} = 2\pi G\rho d$)

$$g_{Dw} + g(z) = 4\pi G\rho \left(\frac{d}{2} - z \right) = g_{Dw} \left(1 - \frac{2z}{d} \right)$$

e, finalmente,

$$g(z) = -g_{Dw} \frac{2z}{d}$$

(e) Como mostra a última expressão, a aceleração gravítica é proporcional à distância ao plano central, ou seja pode escrever-se na forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

O movimento de uma partícula largada da superfície do planeta para dentro do poço é harmónico simples com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2g_{Dw}}{d}}.$$

O período é, pois,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{2g_{Dw}}}$$

Usando a expressão $d = \frac{2}{3} R_T$ e substituindo valores, encontra-se

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{3g_{Dw}}} = 48,9 \text{ minutos}$$

2. Disco de Faraday

(a) Na ausência de corrente a velocidade dos electrões é igual à velocidade de cada ponto do cilindro:

$$\vec{v} = \omega r \hat{e}_\theta$$

Como $\vec{B} = B \hat{e}_z$ a força magnética sobre os electrões é dada por

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = -evB \hat{e}_r$$

ou seja

$$\boxed{\vec{F}_m = -eB\omega r \hat{e}_r.}$$

(b) Para que a força electromagnética $\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ seja nula surge um campo eléctrico induzido tal que

$$\vec{E} = -B\omega r \hat{e}_r.$$

Este campo depende da distância ao eixo de rotação, $E(r) = -B\omega r$. O campo eléctrico aponta do exterior para o interior. Logo, a periferia do cilindro fica a um potencial maior do que o seu centro. A diferença de potencial entre qualquer ponto da periferia do cilindro (P) e o centro (C) é

$$V_p - V_c = \Delta V = \frac{1}{2} \omega B a^2.$$

Designando a secção recta do cilindro por A , tem-se $A = \pi a^2$ e a equação acima pode escrever-se $\Delta V = \frac{\omega}{2\pi} BA$. Por um lado, $\frac{\omega}{2\pi} = T^{-1}$ é o inverso do período de rotação; por outro lado, $BA = \phi$ é o fluxo do campo magnético através da secção recta do cilindro. Portanto,

$$\boxed{\Delta V = \frac{\phi}{T}}$$

(c) Se o gerador de Faraday estiver ligado a uma resistência externa, R , a corrente que passa na resistência é

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

e a potência dissipada por efeito Joule é

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R}$$

Como a energia se conserva, esta potência dissipada corresponde à variação da energia cinética do cilindro por unidade de tempo. A energia cinética do cilindro é

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

sendo $I = \frac{1}{2}ma^2$ o momento de inércia do cilindro de massa m . A conservação de energia permite escrever

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{\omega^2 \phi^2}{4\pi^2 R} = -\frac{\phi^2}{2\pi^2 IR} E_c$$

e, finalmente,

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_c}{\tau}}, \quad \text{com } \tau = \frac{2\pi^2 I R}{\phi^2} \quad \text{ou ainda} \quad \boxed{\tau = \frac{m R}{B^2 a^2}}.$$

(d) Para $B = 1 \text{ T}$, e $A = \pi a^2 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ m}^2$, vem $\phi = 4\pi \times 10^{-4} \text{ Wb}$. Por outro lado, $I = ma^2 / 2 = 1 \times 4 \times 10^4 / 2 = 2 \times 10^4 \text{ kg m}^2$ e $R = 10 \text{ } \Omega$. Portanto,

$$\tau = \frac{4\pi^2 \times 10^{-3}}{16\pi^2 \times 10^{-8}} = 25000 \text{ s} \approx 6,9 \text{ horas.}$$

Sendo este o valor da constante de tempo, o cilindro, para parar ao fim de 10 minutos, terá de existir um outro mecanismo de dissipação de energia.

3. Datação por carbono-14

A lei do declínio radioactivo escreve-se

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Por definição, para $t = T_{1/2}$ (tempo de meia-vida) tem-se $N = N_0 / 2$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Tomando logaritmos, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\lambda T_{1/2}})$ que é equivalente a

$$\ln(1) - \ln(2) = -\lambda T_{1/2}$$

e, finalmente,

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

A constante de decaimento é $\lambda = \ln 2 / T_{1/2} = \ln 2 / 5700 \text{ anos}^{-1}$:

$$\boxed{\lambda = 1,216 \times 10^{-4} \text{ anos}^{-1}}.$$

(b) Admitindo que o fóssil tinha, quando morreu, o mesmo teor de carbono-14 que o ser vivo actual, podemos escrever

$$N_{\text{fóssil}}(t) = N_{\text{ser vivo}} e^{-\lambda t}$$

No caso em análise, $N_{\text{fóssil}} / N_{\text{ser vivo}} = 0,1$ e portanto $0,1 = e^{-\lambda t}$ ou

$$t = -\frac{\ln(0,1)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,1)}{1,216 \times 10^{-4}}$$

e

$$t = 1,89 \times 10^4 \text{ anos.}$$

(c) Escrevemos agora $e^{-\lambda t} = \frac{0,0006 \times N_{\text{ser vivo}}}{N_{\text{ser vivo}}}$, donde

$$t = -\frac{\ln(0,0006)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,0006)}{1,216 \times 10^{-4}}$$

e

$$t \approx 61\,000 \text{ anos.}$$

(d) A actividade é $R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ ou $R = R_0 e^{-\lambda t}$ com $R_0 = \lambda N_0$ (e $R = \lambda N$).

Para $N = 10^{15}$ e $\lambda = 3,856 \times 10^{-12}$ vem

$$R = 3856 \text{ desintegrações/segundo}$$

4. Arrefecimento de átomos

a) De

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

obtem-se

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

e, substituindo valores (a massa do átomo de sódio é $m = 3,819 \times 10^{-26}$ kg), vem

$$v = 570 \text{ m/s.}$$

(Nota: considerou-se a velocidade média igual à velocidade quadrática média.)

b)



A conservação do momento linear segundo a direcção do movimento permite escrever:

$$\vec{p}_{\text{final átomo}} = \vec{p}_{\text{fóton}} + \vec{p}_{\text{inicial átomo}}$$

ou ainda $\Delta \vec{p}_{\text{átomo}} = \vec{p}_{\text{fóton}}$. Segundo o eixo Ox , $\Delta p_{\text{átomo}} = -h/\lambda = -E_{\text{fóton}}/c$ pelo que a variação da velocidade do átomo é

$$\Delta v = -\frac{E_{\text{fóton}}}{mc}$$

De acordo com a aproximação sugerida no enunciado, $E_{\text{fotão}} \approx E_{\text{transição}} = E_{\text{exc}} - E_{\text{fund}} = -3,04 + 5,14 = 2,10 \text{ eV} = 3,36 \times 10^{-19} \text{ J}$. A variação de velocidade em cada colisão frontal, $\Delta v = -E_{\text{fotão}} / mc$, é, substituindo valores,

$$\Delta v = -2,93 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

Seriam necessárias $570 / (2,93 \times 10^{-2}) = 1,94 \times 10^4$ colisões.

c) Vamos considerar todas as grandezas vectoriais projectadas na direcção 0x.

(c.1) A energia cinética final do átomo é

$$E_{c \text{ final}} = \frac{1}{2} m (|v_i| - |\Delta v|)^2 = \frac{1}{2} m (|v_i|^2 - 2v_i |\Delta v| + |\Delta v|^2) = E_{c \text{ inicial}} + \frac{1}{2} m (-2v_i |\Delta v| + |\Delta v|^2)$$

e, portanto,

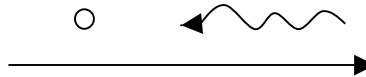
$$\Delta E_c = -m |v_i| |\Delta v| + \frac{1}{2} m |\Delta v|^2$$

(c.2) Desprezando o segundo termo na expressão anterior $\Delta E_c \approx -m |v_i| |\Delta v|$ e usando o

resultado da alínea (b), $\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$, encontra-se

$$\frac{\Delta E_c}{E_{\text{fotão}}} \approx -\frac{|v_i|}{c} = -1,9 \times 10^{-6}$$

(d.1)



A conservação de momento linear permite concluir que a variação de velocidade do átomo é, tal como encontrámos na alínea (b), $\Delta v = -\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$. Esta é, pois, a velocidade final do átomo depois de absorver o fóton. A variação de energia cinética do átomo é, portanto,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2}$$

Esta energia tem de ser fornecida pelo fóton, logo $E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \Delta E_c$

$$E_{\text{fotão}} = E_{\text{transição}} + \frac{1}{2} \frac{E_{\text{fotão}}^2}{m c^2} \quad \text{de onde se conclui que} \quad E_{\text{fotão}} > E_{\text{transição}}$$

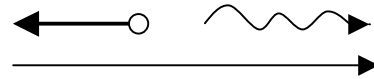
(d.2) Como $\frac{E_{\text{fotão}}^2}{mc^2} \approx \frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2} = 3,28 \times 10^{-29} \text{ J}$, a variação de energia cinética do átomo é

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2}, \text{ ou seja}$$

$$\Delta E_c = 1,64 \times 10^{-29} \text{ J.}$$

(d.3) Na emissão do fóton, tal como na absorção há conservação do momento linear.

$$\vec{p}_{\text{inicial átomo}} = \vec{p}_{\text{final átomo}} + \vec{p}_{\text{fotão}}$$



$$m \vec{v}_i = m \vec{v}_f + \vec{p}_{\text{fotão}}$$

A velocidade inicial do átomo aponta agora no sentido negativo de $0x$. Vimos em (d.1) que esta velocidade inicial é $-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc}$. Como o fóton é emitido no sentido positivo, podemos escrever

$$mv_f + \frac{E'_{\text{fotão}}}{c} = -\frac{E_{\text{fotão}}}{c}$$

onde $E'_{\text{fotão}}$ é a energia do fóton emitido ($E_{\text{fotão}}$ é a energia do fóton absorvido). Portanto,

$$v_f = -\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc}$$

A variação da energia cinética do átomo é

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(-\frac{E_{\text{fotão}} + E'_{\text{fotão}}}{mc} \right)^2 - \left(-\frac{E_{\text{fotão}}}{mc} \right)^2 \right]$$

ou ainda

$$\Delta E'_c = \frac{1}{2} \left(\frac{2E_{\text{fotão}} E'_{\text{fotão}}}{mc^2} + \frac{E'^2_{\text{fotão}}}{mc^2} \right)$$

e, finalmente, na aproximação sugerida,

$$\Delta E'_c = \frac{3}{2} \frac{E_{\text{transição}}^2}{mc^2}$$

Esta variação de energia cinética na emissão é o triplo da encontrada na alínea (d.2):

$$\Delta E'_c = 4,92 \times 10^{-29} \text{ J.}$$

(d.4) Devido ao processo de absorção e emissão consecutiva, o átomo, inicialmente em repouso, adquire uma energia cinética $E_c = \Delta E_c + \Delta E'_c = 4,92 \times 10^{-29} + 1,64 \times 10^{-29}$ ou

$$E_c = 6,56 \times 10^{-29} \text{ J}$$

A temperatura correspondente é $T = \frac{2E_c}{3k_B}$, ou seja

$$T = 3 \mu\text{K} .$$

Este valor é muito pequeno (ordem dos microkelvins) pelo que o processo pode ser desprezado no arrefecimento. Só tem importância próximo do zero absoluto (não sendo possível atingi-lo).