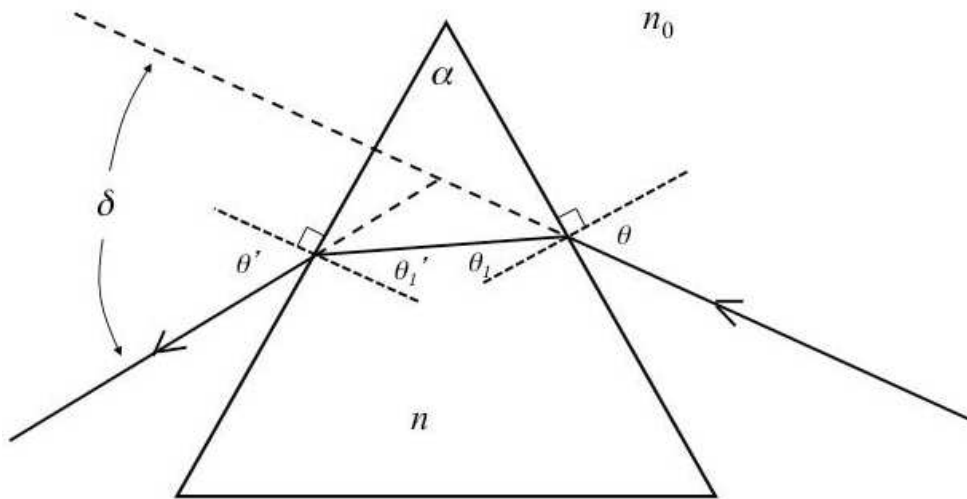


## Problema Experimental

XIII Olimpiada Iberoamericana de Física, 2008, Morelia, Michoacán, México

### Índice de refracción

El propósito del problema es medir el índice de refracción  $n$  de un material transparente, así como la dependencia del ángulo del haz emergente como función del ángulo del haz incidente. Dicho material es un prisma triangular hecho de una resina. La física del problema es muy sencilla. Vea la figura.



Un haz de luz (láser) incide sobre una cara del prisma, haciendo un ángulo  $\theta$  con la normal a la cara. El haz es refractado al entrar al prisma con un ángulo  $\theta_1$ , subsecuentemente incide sobre la cara adyacente con ángulo  $\theta_1'$  y finalmente es refractado por dicha cara con ángulo  $\theta'$ . Llame  $\alpha$  al ángulo del vértice del prisma. Denote por  $\delta$  el ángulo que forma el haz refractado al salir del prisma con la dirección del haz incidente. Considere que el índice de refracción del aire es  $n_0 = 1.0$ .

Le recordamos que la dependencia entre los ángulos de incidencia y refracción de un haz de luz monocromático al pasar de un medio a otro, con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente, está regida por la Ley de Snell:

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \quad (1)$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son los ángulos respectivos que hace el haz con la normal a la superficie entre los medios.

Como consecuencia de la Ley de Snell y la geometría del sistema compuesto por el prisma y el haz de luz, puede demostrarse que existe una función que relaciona el ángulo  $\delta$  con el ángulo  $\theta$ , esto es,  $\delta = \delta(\theta)$ . Dicha función tiene la propiedad de exhibir un mínimo en un ángulo  $\theta_c$ . Llame  $\delta_{\min}$  a dicho valor, es decir,  $\delta_{\min} = \delta(\theta_c)$ . Se puede demostrar que al evaluar la función  $\delta(\theta)$  en  $\theta_c$ ,  $\delta_{\min}$  obedece la siguiente relación:

$$n \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = n_0 \operatorname{sen} \left( \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} \right) \quad (2)$$

**ADVERTENCIA: ¡NUNCA MIRE DIRECTAMENTE EL HAZ DEL LASER!**

**MATERIAL** (No tiene que usar necesariamente todo lo que se provee, sólo lo que necesite)

- Prisma
- Láser
- Base de madera
- Pantalla larga de madera
- Pantalla chica de cartón (10 cm x 10 cm)
- Regla con graduación
- Escuadras
- Papel blanco
- Papel milimétrico ó milimetrado
- Tijeras
- Cinta adhesiva
- Lápices
- Sacapuntas
- Goma para borrar
- Calculadora
- Hilo

**Debido a las posibles imperfecciones del prisma, asegúrese de que el haz incida siempre sobre la misma cara del prisma.**

**Procure que el haz incidente lo haga siempre sobre la parte media de la cara del prisma.**

**Determine siempre los ángulos considerando el centro de la mancha luminosa del haz. Esto permite que la incertidumbre sea en la medida de los ángulos y que el ancho del haz genere sólo a un error sistemático.**

**TAREA 1.** Dibuje un esquema del montaje experimental que le permita determinar los ángulos  $\delta$  y  $\theta$ . (3 puntos)

**TAREA 2.** Determine el índice de refracción  $n$  del prisma usando la fórmula del ángulo mínimo, ecuación (2). (8 puntos en total)

(2.a) Determine el ángulo  $\alpha$  del prisma. (1 punto)

(2.b) Realice mediciones experimentales del ángulo mínimo. Reporte sus datos en forma de tabla. (4 puntos)

(2.c) Calcule las incertidumbres (errores) del ángulo  $\alpha$  y del ángulo mínimo  $\delta_{\min}$ . (1.5 puntos)

(2.d) Obtenga el valor del índice de refracción  $n$  y su incertidumbre. (1.5 puntos)

**TAREA 3** Determinación experimental de la dependencia  $\delta(\theta)$ . (6 puntos total)

(3.a) Realice las mediciones experimentales de parejas de ángulos ( $\delta$ ,  $\theta$ ) suficientes para el objetivo. Reporte sus resultados en forma de tabla.

(3.b) En una hoja de papel milimétrico marque sus puntos experimentales.

**TAREA 4** Determinación teórica de la función  $\delta = \delta(\theta)$  y comparación con la experimental. (3 puntos)

(4.a) Deduzca una fórmula para la función  $\delta = \delta(\theta)$ . *Sugerencia:* Use las siguientes relaciones que pueden deducirse de la figura,

$$\delta = \theta + \theta' - \alpha \quad \text{y} \quad \alpha = \theta_1 + \theta'_1 \quad (3)$$

(2 puntos)

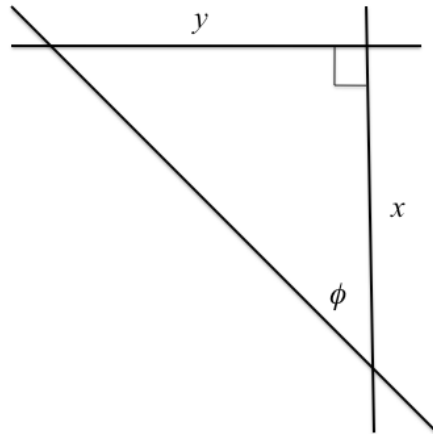
(4.b) Reporte los valores de  $\delta$  calculados para los valores de  $\theta$  obtenidos en (3.a). En la hoja de papel milimétrico de la pregunta (3.b) incluya sus valores calculados  $\delta$  para los correspondientes valores de  $\theta$ . Use los valores del índice de refracción  $n$  y del ángulo  $\alpha$  obtenidos en la TAREA 2. (1 punto)

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

**TAREA 1 Use hojas adicionales si así lo requiere. (3 PUNTOS TOTAL)**

1. Dibuje un esquema Del montaje experimental que le permita determinar los ángulos  $\delta$  y  $\theta$ .

El ángulo se calcula usando  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$



Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

**TAREA 2 Use hojas adicionales si así lo requiere. (8 PUNTOS TOTAL)**

(2.a) Mediciones del ángulo mínimo (EN GRADOS)

$\delta_{\min}$
35.6
36.3
36.1
35.6
36.0

(2.b) Medición del ángulo  $\alpha$ . Pueden escoger hacer UNA medición cuidadosa y asignarle la incertidumbre proveniente de las medidas de las distancias, o pueden hacer varias mediciones y hallar un promedio.

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

(2.c) Análisis de incertidumbres

Para el ángulo  $\delta_{\min}$  calculamos el promedio:

$$\bar{\delta}_{\min} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \delta_i = 35.9$$

La incertidumbre se halla con la desviación cuadrática media:

$$\Delta\delta_{\min} = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\delta_i - \bar{\delta}_{\min})^2} = 0.3$$

Para el ángulo  $\alpha$  usando una medida de distancias, obtenemos

$$\alpha = 59.8 \pm 0.5 \text{ grados}$$

Las incertidumbres de ángulos individuales se realizan de la siguiente manera. Como lo que se mide son longitudes  $x$  y  $y$ , tales que el ángulo en cuestión es

$$\phi = \arctan (y/x)$$

Las longitudes típicas son 100 mm en promedio (o más grandes) y la incertidumbre en la medida es

$$\Delta x = \Delta y = 1.0 \text{ mm}$$

Esto implica que la incertidumbre en el cociente  $y/x$  es

$$\Delta(y/x) = (\Delta y/x) + y \Delta x/x^2 = 0.02$$

A su vez, esto nos da una incertidumbre en el ángulo  $\phi$  (suponiendo un ángulo típico de  $45^\circ$ )

$$\Delta\phi = \Delta(y/x) \cos^2 \phi = 0.01 \text{ radianes} = 0.01 \times 180/\pi = 0.5^\circ$$

Es decir, la incertidumbre en el ángulo puede ponerse en 0.5 grados para todos los ángulos medidos con esta técnica. Por lo tanto, los ángulos pueden tomarse hasta la primera cifra decimal, e.g.  $\phi = 38.7 \pm 0.5$

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

(2.d) Valor del índice de refracción y su incertidumbre.

Se usa la fórmula del ángulo mínimo

$$n_1 = n_0 \frac{\text{sen}\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = 1.487$$

donde se usaron los valores medios de  $\delta_{\min}$  y  $\alpha$  con  $n_0 = 1.0$

Para la incertidumbre usamos la fórmula de la derivada:

$$\Delta n_1 = \frac{\cos\left(\frac{\bar{\delta}_{\min} + \bar{\alpha}}{2}\right)}{\text{sen}\frac{\bar{\alpha}}{2}} \Delta\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) + \frac{\text{sen}\left(\frac{\bar{\delta}_{\min} + \bar{\alpha}}{2}\right) \cos\frac{\bar{\alpha}}{2}}{\text{sen}^2\frac{\bar{\alpha}}{2}} \Delta\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde

$$\Delta\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta\delta)^2 + (\Delta\alpha)^2} \approx 0.005 \text{ radianes}$$

Se obtiene

$$n_1 \approx 1.487 \pm 0.007 \approx 1.49 \pm 0.01$$

$$\alpha \approx 59.8 \pm 0.5 \text{ grados}$$

**CALIFICACION:**



Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

**TAREA 3 Use hojas adicionales si así lo requiere. (6 PUNTOS TOTAL)**

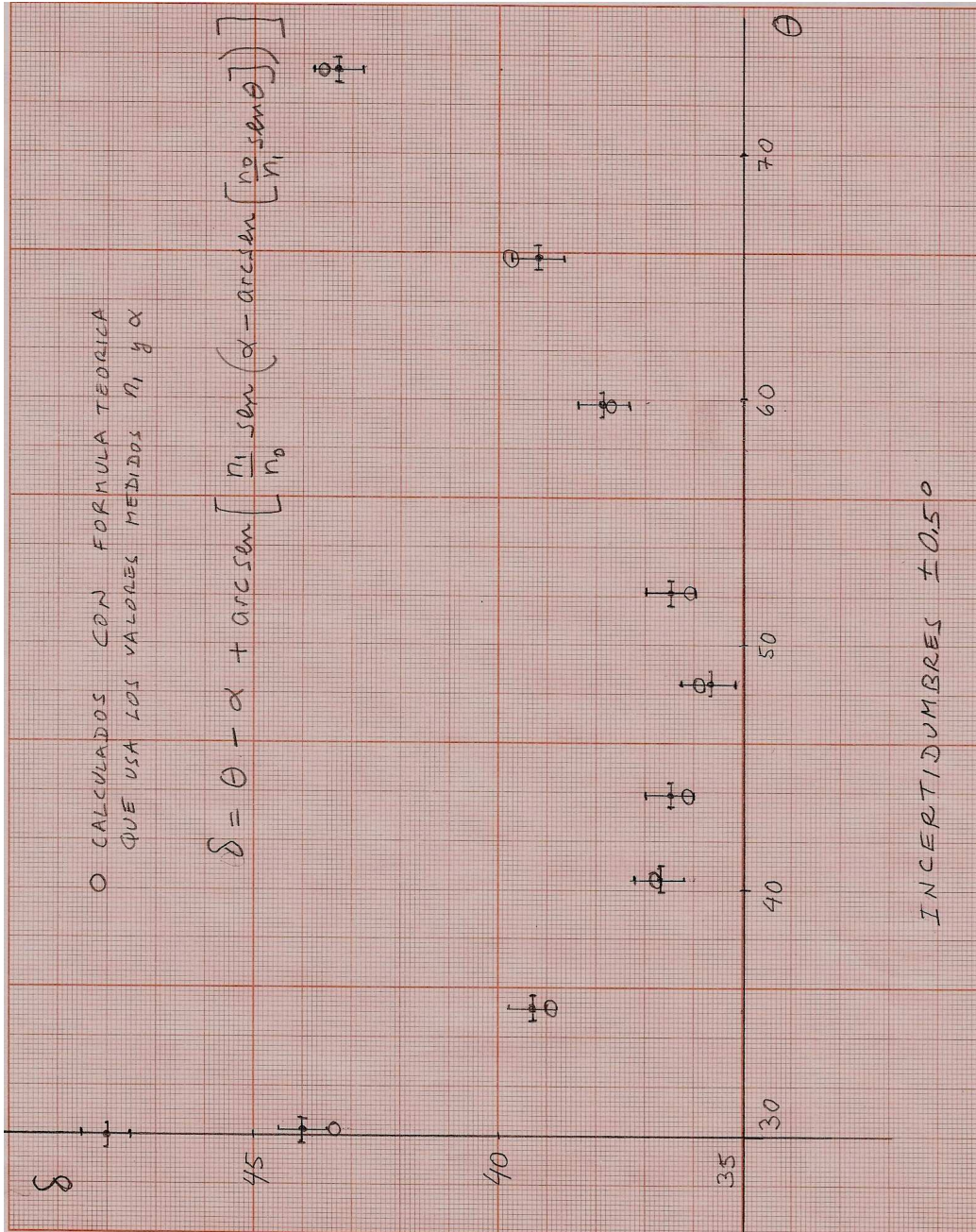
(3.a) Mediciones experimentales de parejas de ángulos ( $\delta, \theta$ ). (EN GRADOS)

$\delta$	$\theta$
48.0	30.0
44.0	30.2
39.3	35.1
36.7	40.4
36.5	43.9
35.7	48.4
36.5	52.1
37.9	59.8
39.2	65.8
43.3	73.4

(3.b) Las incertidumbres son todas +- 0.5 grados. Ver (2.b)

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

(3.c) Gráfica con puntos experimentales y calculados (ver 4.b)



CALIFICACION

Código del estudiante:	Número de Página:	Total de Páginas:
------------------------	-------------------	-------------------

**TAREA 4 Use hojas adicionales si así lo requiere. (3 PUNTOS TOTAL)**

(4.b) Deducción de la fórmula teórica

De las expresiones  $\delta = \theta + \theta' - (\theta_1 + \theta'_1)$  y  $\alpha = \theta_1 + \theta'_1$

vemos que sólo necesitamos conocer  $\theta$ . Usamos la Ley de Snell en cada cara,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_0 \sin \theta \quad \text{y} \quad n_1 \sin \theta'_1 = n_0 \sin \theta$$

despejamos  $\theta$  y sustituimos en  $\delta$

$$\delta = \theta + \arcsen \left\{ \frac{n_1}{n_0} \sin \left[ \alpha - \arcsen \left( \frac{n_0}{n_1} \sin \theta \right) \right] \right\} - \alpha$$

(4.b) Cálculo de  $\delta$  con la fórmula teórica para  $\theta$  dada de la tabla de (3.a)

$\delta_{\text{medida}}$	$\theta$	$\delta_{\text{calculada}}$
48.0	30.0	43.7
44.0	30.2	43.4
39.3	35.1	38.9
36.7	40.4	36.8
36.5	43.9	36.1
35.7	48.4	35.9
36.5	52.1	36.1
37.9	59.8	37.7
39.2	65.8	39.8
43.3	73.4	43.6

Los puntos están en la gráfica (3.c)

(4.c) Con excepción del primer punto, a un ángulo de incidencia muy pequeño, el acuerdo teórico-experimental es muy bueno, dentro del error.

**CALIFICACION**