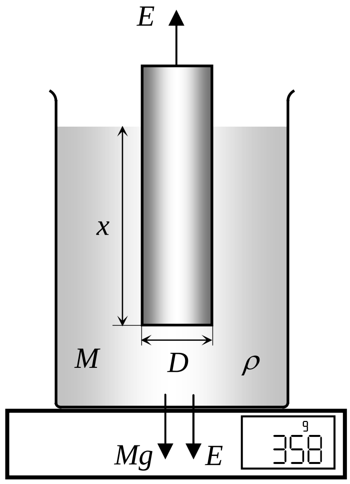
PRUEBA EXPERIMENTAL A (10 puntos)

Principio de Arquímedes. Determinación de la densidad de un líquido.

Material.

- Vaso de plástico.
- Líquido problema (zumo de manzana).
- Pieza cilíndrica de plástico, con gancho de sujeción.
- Base soporte con varilla vertical, varilla y manguito roscados, nuez e hilo, para colgar el cilindro.
- Balanza digital.
- Cinta adhesiva.
- Rotulador y regla.

Fundamento teórico.



El conocido Principio de Arquímedes indica que *todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del volumen de fluido desalojado*.

En el experimento de la figura, un cuerpo cilíndrico vertical de diámetro D está parcialmente sumergido una longitud x en un líquido, desalojando un volumen

$$V = \pi (D/2)^2 x \, .$$

Por tanto, el empuje que experimenta hacia arriba es

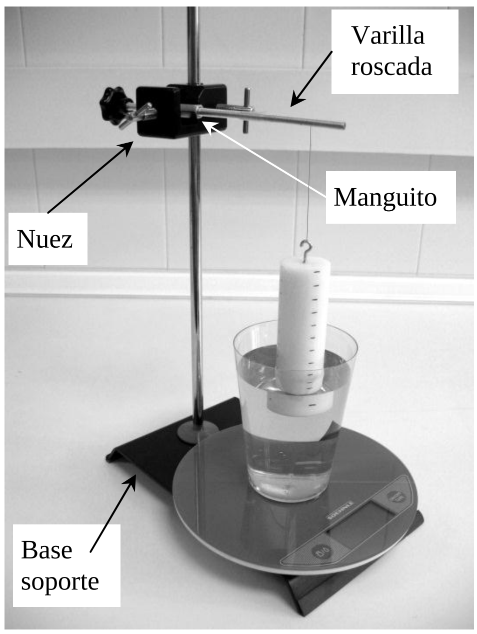
$$E = \rho V g = \rho \pi (D/2)^2 g \, x \, ,$$

donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad.

Este empuje puede determinarse apoyando el sistema sobre una balanza, que mide la masa aparente colocada sobre ella: si la fuerza total de apoyo sobre la balanza es F, la balanza medirá una masa aparente $M_{ap} = F/g$. Teniendo en cuenta el principio de acción y reacción, la fuerza total de apoyo en nuestro caso será el peso del vaso con el líquido, Mg, más el empuje E ejercido por el cilindro sobre el líquido, de forma que la balanza indicará una masa aparente

$$M_{ap} = M + \frac{E}{g} = M + \rho \frac{\pi D^2}{4} x \, .$$

Dato: Diámetro del cilindro: $D = (36{,}0 \pm 0{,}1)$ mm .



Procedimiento experimental.

Para precisar la medida de la longitud sumergida, x, dibuje una escala (o varias) en la pared lateral del cilindro, con ayuda de la regla y del rotulador suministrados.

Sitúe la balanza sobre la base soporte y encima el vaso. Suspenda el cilindro sobre el centro del vaso, usando un trozo de hilo arrollado en la varilla roscada. Fije el extremo del hilo a esta varilla con cinta adhesiva, para que no pueda resbalar.

El conjunto se sujeta a la varilla vertical mediante un "manguito" hexagonal roscado y una "nuez" (véase la fotografía adjunta).

La longitud de cilindro sumergida, x, se puede ajustar girando la varilla roscada para enrollar o desenrollar hilo.

El nivel inicial de líquido en el vaso debe ser el adecuado para que el cilindro se pueda sumergir hasta, al menos, x = 10 cm, sin que el cilindro toque fondo ni el líquido se desborde.

Cuando vaya a comenzar las medidas, retire el vaso de la balanza y pulse el botón de encendido ("ON"). Asegúrese de que mide en gramos (aparece la letra g en la parte superior de la pantalla). Si no es así, pulse el botón izquierdo hasta conseguirlo. Después, apoye el vaso sobre el centro de la balanza.

Precauciones y consejos:

- La balanza tiene en su cara inferior cuatro puntos de apoyo. Para que las medidas sean correctas, los cuatro deben apoyar sobre la misma superficie horizontal, en nuestro caso la base soporte de la varilla vertical.
- Evite que el cilindro roce las paredes del vaso o toque el fondo.
- Una burbuja de aire bajo la base del cilindro, o en su lateral, puede falsear las medidas.
- La balanza dispone de la función *tara* ("TARE"): si se pulsa el botón derecho con la balanza encendida, el aparato tomará esa situación como nueva referencia de masas, anulando la lectura en pantalla. Obviamente, la tara no debe cambiar durante las medidas, por lo que no debe pulsarse la tecla "TARE" mientras se realizan.
- Al cabo de unos cuatro minutos sin que cambie la pesada, la balanza se apaga automáticamente. En este caso hay que volver a encenderla en las mismas condiciones que al principio, para que la tara sea la misma. Para evitar problemas, es mejor no demorarse de una medida a otra, hasta completar la serie.
- Para apagar la balanza, mantenga pulsado durante unos segundos el botón derecho ("OFF").
- Al terminar la prueba, deje su puesto de trabajo limpio y ordenado, tal y como lo ha encontrado.
- **Atención:** extreme el cuidado para evitar que el vaso se vuelque y el líquido se derrame. **Podría arruinar su trabajo previo.**

Cuestiones.

a) Para una serie de valores de x, anote la masa aparente indicada por la balanza, M_{ap}. Presente sus medidas en una tabla. (2 puntos)

b) Represente gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales (x, M_{ap}) obtenidos. (2 puntos)

c) Ajuste una línea recta a estos puntos. (2 puntos)

d) A partir del ajuste anterior, obtenga la densidad del líquido, ρ. (1 punto)

e) Teniendo en cuenta únicamente la incertidumbre indicada para el diámetro del cilindro, ΔD = 0,1 mm, calcule la incertidumbre de la densidad del líquido, $\Delta\rho_D$. (3 puntos)

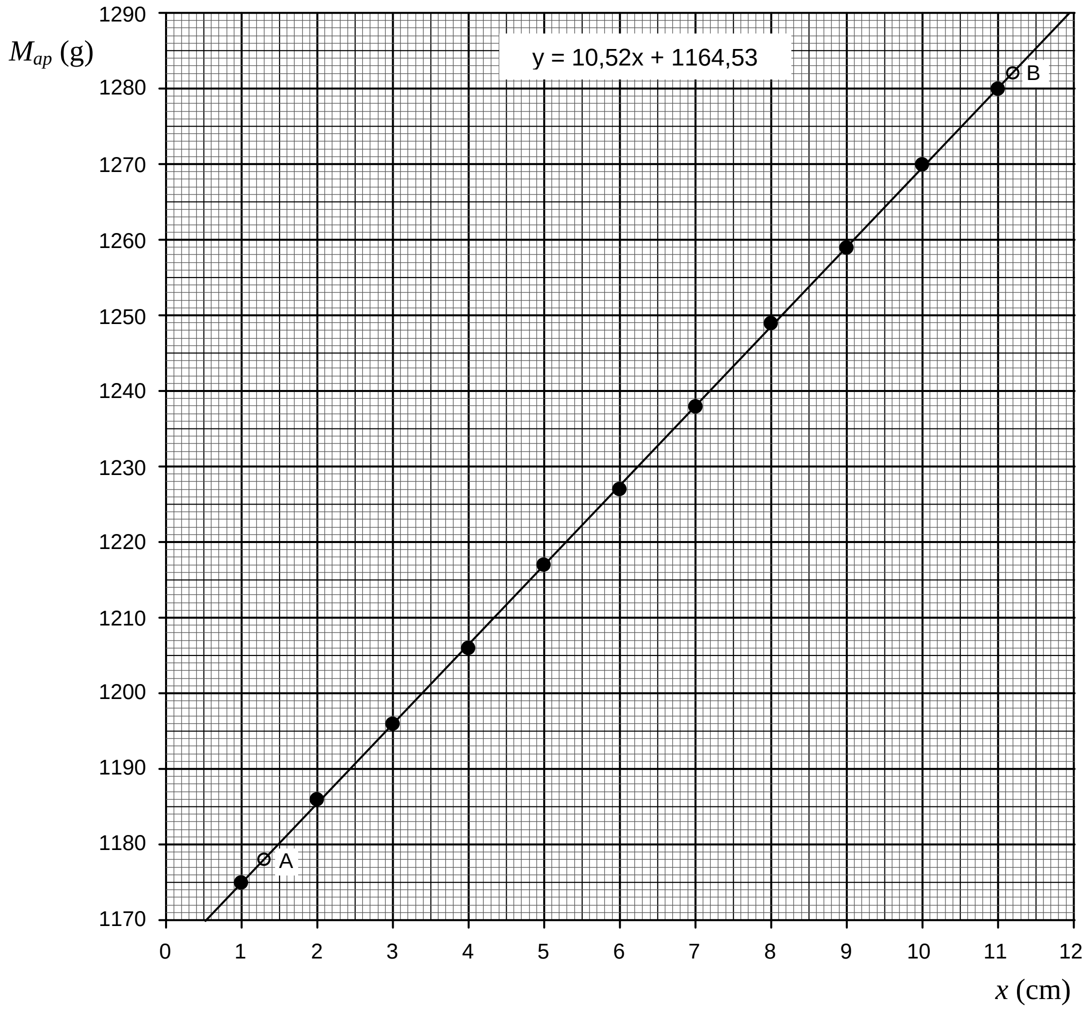
PRUEBA EXPERIMENTAL A

Principio de Arquímedes. Determinación de la densidad de un líquido. **Solución**

a) Tabla de medidas:

***x* (cm)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{ap} (g)	1175	1186	1196	1206	1217	1228	1238	1249	1259	1270	1280

b) Se presenta a continuación la gráfica pedida, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado. No se va a tener en cuenta el punto correspondiente a x = 0 porque puede tener una apreciable desviación sistemática respecto a los demás, debido al método de enrase visual.



c) Se observa que los puntos experimentales se ajustan muy bien a una línea recta, como estaba previsto. La pendiente de esta recta se puede obtener manualmente trazando la recta que más se aproxima a los puntos experimentales y leyendo en la gráfica las coordenadas de dos puntos alejados de dicha recta, por ejemplo los puntos A y B indicados en la figura anterior, escogidos en el cruce de dos líneas de división. Las coordenadas de estos puntos son:

$$(x_A;\ y_A) = (1{,}30\,\text{cm};\ 1178{,}0\,\text{g})$$

$$(x_B;\ y_B) = (11{,}20\,\text{cm};\ 1282{,}0\,\text{g})$$

Por tanto, la pendiente de la recta es

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{104{,}0\,\text{g}}{9{,}90\,\text{cm}} \qquad \boxed{p = 10{,}51\ \text{g/cm} = 1{,}051\ \text{kg/m}}$$

Un ajuste analítico, aplicando el método de mínimos cuadrados, conduce a un resultado muy similar

$$\boxed{p = 10{,}52\ \text{g/cm} = 1{,}052\ \text{kg/m}}$$

d) Según el modelo del enunciado, la pendiente de la recta M_{ap} frente a x es

$$p = \rho \frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{4p}{\pi D^2}$$

Empleando para los cálculos el último valor de la pendiente, se obtiene

$$\boxed{\rho = 1{,}034\,\text{g/cm}^3 = 1{,}034 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}$$

e) En el enunciado se indica el diámetro del cilindro $D = (36{,}0 \pm 0{,}1)$ mm, es decir con una incertidumbre $\Delta D = 0{,}1$ mm. La incertidumbre transmitida a la densidad, $\Delta\rho_D$, puede calcularse numéricamente a partir de los valores extremos del diámetro

$$D_{\min} = 3{,}59\ \text{cm} \qquad D_{\max} = 3{,}61\ \text{cm}$$

$$\Delta\rho_D = \frac{1}{2}(\rho_{\max} - \rho_{\min}) = \frac{2p}{\pi}\left(\frac{1}{D_{\min}^2} - \frac{1}{D_{\max}^2}\right) \qquad \boxed{\Delta\rho_D = 0{,}006\ \text{g/cm}^3}$$

A este resultado también se puede llegar de una forma más elegante, aunque no más precisa, tomando incrementos (en valor absoluto) en la expresión de la densidad

$$\rho = \frac{4p}{\pi D^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\rho_D = 2\frac{4p}{\pi D^3}\Delta D = 2\rho\frac{\Delta D}{D} = 0{,}006\ \text{g/cm}^3$$

Nota: Un tratamiento de errores completo tendría también en cuenta la incertidumbre Δp de la pendiente de la recta ajustada, y su transmisión al error de la densidad, $\Delta\rho_p$. Pero los puntos experimentales están muy bien alineados, de forma que no es fácil realizar una estimación "manual" a partir de las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. Habría que tener en cuenta las "barras de error" de cada punto experimental, que pueden estimarse a partir de la resolución del método de medida: $\Delta x \approx 1$ mm, $\Delta M_{ap} \approx 1$ g. Estas incertidumbres son relativamente pequeñas, del mismo orden que el radio de los puntos dibujados en la gráfica. Otra posibilidad razonable sería tener en cuenta el pequeño error que puede cometerse al trazar manualmente la mejor recta y, después, leer las coordenadas de los puntos A y B. En cualquiera de los dos casos, puede estimarse una incertidumbre en ordenadas del orden de un cuadrito de la gráfica

$$\Delta(y_B - y_A) = 1\ \text{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 0{,}09\ \text{g/cm}$$

El error típico de la pendiente, calculado analíticamente, es $\varepsilon_p = 0{,}03\ \text{g/cm}$, de forma que el anterior Δp tiene un nivel de confianza muy alto, superior al 95%.

Como la densidad es directamente proporcional a la pendiente, se transmite la incertidumbre relativa:

$$\Delta\rho_p = \rho\frac{\Delta p}{p} = 0{,}009\ \text{g/cm}^3$$

En total, $\quad \Delta\rho = \left(\Delta\rho_D^2 + \Delta\rho_p^2\right)^{1/2} \qquad \Delta\rho = 0{,}011\,\text{g/cm}^3$

PRUEBA EXPERIMENTAL B (10 puntos)

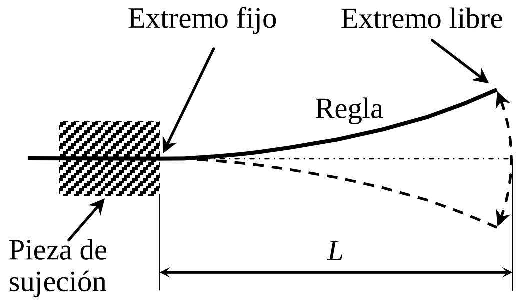
Estudio de la vibración transversal de una regla metálica.

Material.

- Regla metálica.
- Pieza de aluminio para sujetar la regla.
- "Sargento" (tornillo de mesa) para sujetar el sistema a la mesa.
- Flash periódico (estroboscopio), con fuente de alimentación externa.
- Multímetro con función frecuencímetro.
- Cartulina negra.

Fundamento teórico.

En este experimento se van a estudiar las oscilaciones transversales de una regla metálica en función de su longitud libre, L. En particular se estudiará el modo fundamental de vibración, con un nodo en el extremo fijo y un antinodo (vientre) en el extremo libre, como se esquematiza en la figura adjunta.



Se espera que la frecuencia de vibración de la regla, f, dependa de su longitud en la forma

$$f = K\,L^n\,, \qquad (1)$$

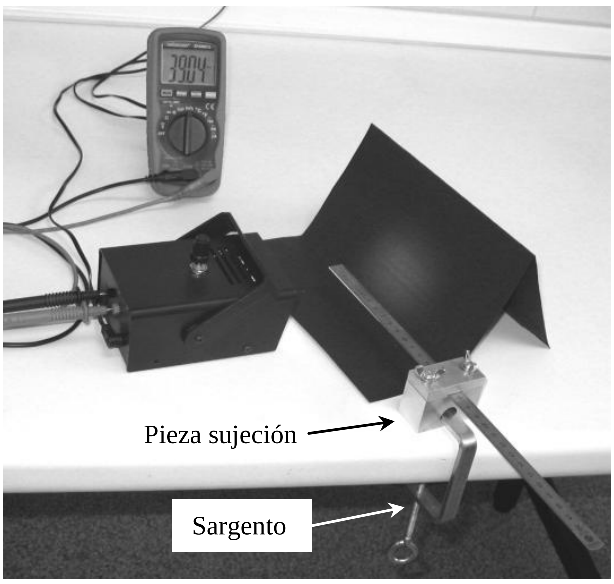
donde n es un número entero o semientero y K es una constante que depende del material y de las dimensiones transversales de la regla.

El objetivo de esta prueba es determinar los valores de n y K, midiendo f en función de L.

Procedimiento experimental

La pieza de aluminio permite sujetar la regla con una longitud libre ajustable, L. Para modificar esta longitud basta aflojar los dos tornillos ("palomillas") de su parte superior, deslizar la regla hasta la nueva longitud y volver a apretar los tornillos.

La pieza de aluminio se sujeta al borde de la mesa con el "sargento" (tornillo de mesa), como se indica en la fotografía adjunta.



La oscilación de la regla es demasiado rápida para poder cronometrar manualmente su periodo. Para medir la frecuencia de oscilación se va a recurrir a un sistema de iluminación *estroboscópica*: una fuente de luz emite pulsos luminosos periódicos muy breves, con una frecuencia, F, que se puede modificar. Cuando la frecuencia del estroboscopio coincida con la frecuencia de oscilación de la regla, es decir $F = f$, los sucesivos pulsos iluminarán la regla pasando por la misma posición, de forma que la regla se verá aparentemente quieta.

La regla también parecerá inmóvil cuando F sea un submúltiplo de f, es decir cuando $F = f/2,\ f/3,\ f/4...$, ya que en estos casos la regla realiza 2, 3, 4… oscilaciones completas entre dos pulsos sucesivos de luz. Por el contrario, si F es múltiplo de f, o sea $F = 2f,\ 3f\,...$, la regla se observará aparentemente quieta en 2, 3… posiciones de su oscilación.

La frecuencia del estroboscopio, F, puede modificarse con el potenciómetro de 10 vueltas en la parte superior del aparato, y medirse con el multímetro, actuando como frecuencímetro. Para ello, sitúe el selector del multímetro en la posición "Hz" y conecte las dos puntas de prueba a los terminales negro y rojo en la parte trasera del estroboscopio.

La fuente de alimentación del estroboscopio se conecta a la red eléctrica, y su salida (12 V) a la parte posterior del aparato.

Para mejorar el contraste de observación, el canto de la regla está pintado de blanco difusor, y conviene observar sobre un fondo oscuro. Dispone de una cartulina negra, que puede doblar y situar debajo y detrás de la regla, al otro lado del estroboscopio, como se muestra en la fotografía.

Dato: La precisión del frecuencímetro, en el rango hasta 99,99 Hz, es del ±1,5% de la lectura en pantalla.

Comentarios y consejos:

- La oscilación real de la regla es amortiguada, es decir, la amplitud de oscilación se reduce paulatinamente hasta que la regla se detiene en su posición de equilibrio. Por tanto, cuando F coincida con f, la regla no se observará completamente quieta, sino aproximándose lentamente a su posición de equilibrio.
- La regla debe estar bien colocada entre las dos partes de la pieza de sujeción de aluminio, dentro de la acanaladura de la parte inferior. La parte superior de la pieza debe ser paralela a la inferior, para que la regla esté uniformemente sujeta en toda su anchura.
- El sargento debe sujetar firmemente la pieza de aluminio a la mesa, para que no pueda vibrar.
- Cuando no esté tomando medidas, desconecte la alimentación del estroboscopio, para evitar que se sobrecaliente o su luz moleste a otros participantes.
- El multímetro se apaga automáticamente al cabo de unos minutos de funcionamiento. Para volver a encenderlo basta pulsar la tecla amarilla ("Mode").

Cuestiones.

a) Para una longitud libre de regla L = 14,0 cm, localice y anote todas las frecuencias de iluminación, F_1, F_2, F_3… para las que se observa la regla quieta en una o en dos posiciones. Busque en todo el rango de frecuencias del estroboscopio, entre aproximadamente 6 y 50 Hz. De todas estas frecuencias, ¿cuál es la frecuencia f de oscilación de la regla? (2 puntos)

b) Haga una serie de medidas de la frecuencia f de oscilación de la regla en función de su longitud L, entre L_{min} = 10,0 cm y L_{max} = 22,0 cm. (2 puntos)

c) A partir de las medidas anteriores, con la gráfica y el ajuste que considere oportunos, deduzca el valor del exponente n en la ecuación (1). (2 puntos)

d) Determine el valor de la constante K de la regla, con la gráfica y el ajuste que considere oportunos, teniendo en cuenta que el valor de n debe ser entero o semientero. (2 puntos).

e) Haga una estimación de la incertidumbre de esta constante, ΔK. (2 puntos).

PRUEBA EXPERIMENTAL B

Estudio de la vibración transversal de una regla metálica. Solución

a) Con L = 14,0 cm, barriendo desde bajas frecuencias de iluminación, se observa la regla quieta para

$$F_1 = 7{,}17 \text{ Hz} , \quad F_2 = 10{,}72 \text{ Hz} , \quad F_3 = 21{,}45 \text{ Hz} .$$

Y se observa doble para

$$F_4 = 42{,}98 \text{ Hz} .$$

Como era de esperar, estos cuatro valores siguen, aproximadamente, la proporción 1/3 : 1/2 : 1 : 2, de forma que la frecuencia de oscilación de la regla para esta longitud es $f = F_3 = 21{,}45 \text{ Hz}$.

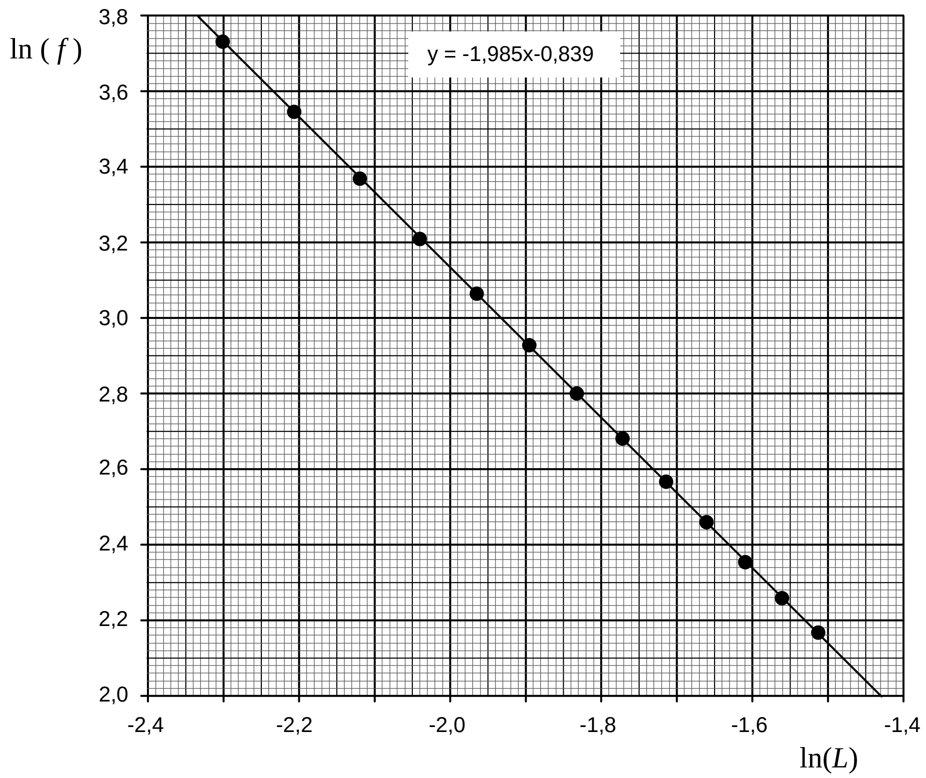
b) Las medidas sistemáticas de f en función de L se presentan en la siguiente tabla, junto con otros valores que se necesitarán más adelante.

L (m)	0,100	0,110	0,120	0,130	0,140	0,150	0,160	0,170	0,180	0,190	0,200	0,210	0,220
f (Hz)	41,76	34,70	29,03	24,75	21,42	18,71	16,47	14,59	13,04	11,70	10,53	9,56	8,74
ln(L)	-2,303	-2,207	-2,120	-2,040	-1,966	-1,897	-1,833	-1,772	-1,715	-1,661	-1,609	-1,561	-1,514
ln(f)	3,732	3,547	3,368	3,209	3,064	2,929	2,802	2,680	2,568	2,460	2,354	2,258	2,168
$1/L^2$ (m^{-2})	100,00	82,64	69,44	59,17	51,02	44,44	39,06	34,60	30,86	27,70	25,00	22,68	20,66

c) Para linealizar la ecuación (1) del enunciado basta tomar logaritmos (en cualquier base)

$$\ln(f) = \ln(K) + n \ln(L) \qquad (2)$$

Por tanto, la n buscada es la pendiente de una gráfica de ln(f) frente a ln(L). A continuación se presenta esta gráfica, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado (a pequeña escala).



Los puntos están bien alineados, como se esperaba. La pendiente de la recta, calculada por el método de mínimos cuadrados es $p = -1{,}985$, por lo que el exponente entero o semientero buscado es, evidentemente,

$$\boxed{n = -2}$$

Es decir, la dependencia entre f y L es de la forma

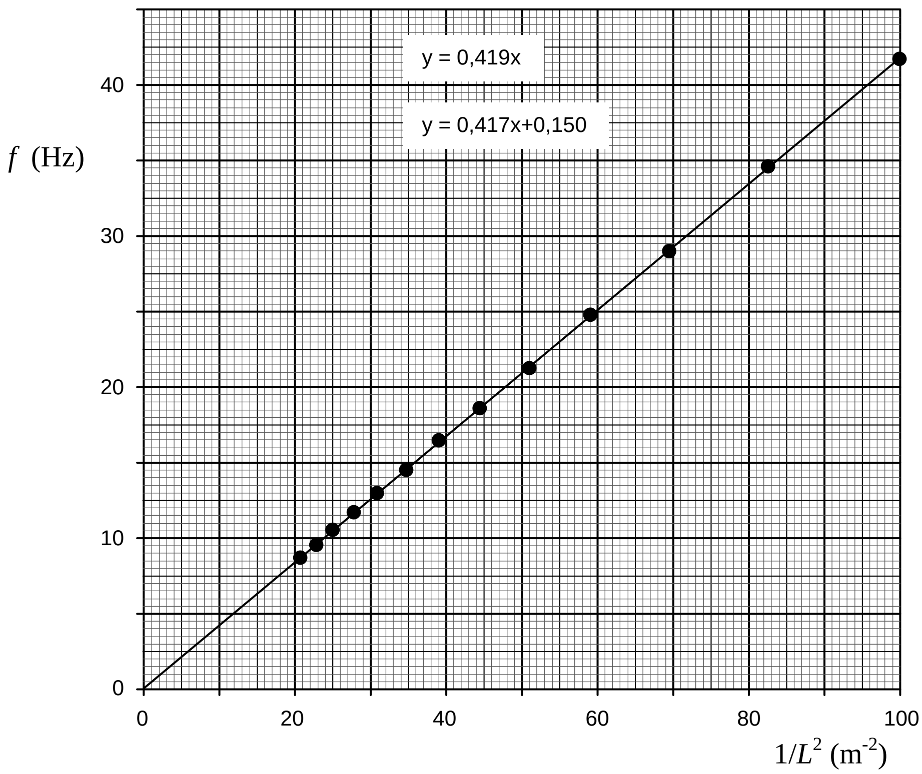
$$f = \frac{K}{L^2} \qquad (3)$$

d) Una primera aproximación al valor de la constante K puede obtenerse a partir del ajuste anterior, puesto que, de acuerdo con (2), la ordenada en el origen de la recta es

$$\ln(K) = -0{,}839 \qquad \Rightarrow \qquad K = 0{,}432 \ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

Este resultado procede de un ajuste con n próximo a -2, pero no exactamente igual a este valor, de forma que el valor de K que se obtiene arrastra una pequeña desviación.

Es más exacto volver al modelo teórico planteado en el enunciado con $n = -2$, es decir asumir la dependencia (3), de forma que K es la pendiente de f frente a $1/L^2$. En la siguiente gráfica se comprueba que los correspondientes puntos experimentales se ajustan muy bien a una línea recta que pasa por el origen, con pendiente $p = 0{,}419 \ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$. Si se deja libre la ordenada en el origen, la pendiente que se obtiene es casi la misma, con tres cifras significativas: $p = 0{,}417 \ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$.



Considerando el primer ajuste como más fiable, pues se adapta al modelo propuesto, la constante buscada es

$$\boxed{K = 0{,}419 \ \mathrm{m^2\,s^{-1}}}$$

e) La incertidumbre de esta constante, ΔK, coincide con la incertidumbre de la pendiente de la gráfica anterior. Para hacer una estimación manual deben trazarse las dos rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. Como la dispersión de los puntos respecto a la recta óptima es casi nula (el error típico de la pendiente es $\varepsilon_p = 0{,}0006\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, es decir sólo un 0,14%) hay que recurrir a una estimación de la incertidumbre de cada punto, es decir de las "barras de error" de estos puntos.

En el eje horizontal, la incertidumbre absoluta y relativa de $1/L^2$ puede calcularse en la forma

$$\Delta\left(\frac{1}{L^2}\right) = 2\frac{\Delta L}{L^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta\left(1/L^2\right)}{1/L^2} = 2\frac{\Delta L}{L}$$

La precisión de la longitud L puede estimarse, siendo algo pesimistas, en $\Delta L = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, lo que da un error relativo porcentual, $100\Delta L/L$, entre el 0,5% para L = 10 cm y el 0,23% para L = 22 cm. El error relativo transmitido a la variable $1/L^2$ es el doble, es decir entre el 1%, para los valores más altos de $1/L^2$, y el 0,5% para los más bajos. Es de esperar que estos errores sean aleatorios, por lo que su influencia en la pendiente de la recta será inferior al 1%.

En cuanto a la incertidumbre de la frecuencia f, en el eje vertical, viene dada directamente por la precisión del frecuencímetro: 1,5%. Esta posible desviación, debida a una inexacta calibración del aparato, es sistemática.

En total, una estimación razonable para la incertidumbre de la pendiente de la recta, y por tanto del valor de la constante K, podría ser de un 2%, con lo que

$$\boxed{\Delta K = 0{,}008\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}}$$

Nota sobre la constante K:

Puede demostrarse que esta constante viene dada por

$$K = 0{,}1615\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\ b$$

donde Y y ρ son el módulo de Young y la densidad del material, y b es el grosor de la regla.

En nuestro caso, la regla es de acero, con

$$Y \approx 2{,}1\times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$$

$$\rho \approx 7{,}8\times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$b = 0{,}50\ \mathrm{mm}$$

Con lo que se obtiene

$$K \approx 0{,}42\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

El resultado experimental de nuestra prueba es perfectamente acorde con este valor.