

Introducción común a los problemas P1 y P2

Para explicar la conservación de la energía y del momento lineal en la desintegración β , el físico austriaco Wolfgang Pauli predijo en 1930 la existencia de una partícula de masa nula o prácticamente nula, sin carga eléctrica y con una interacción muy débil con la materia, por lo tanto muy difícil de detectar. Posteriormente, Enrico Fermi le dio el nombre de *neutrino*. En 1956, Clyde Cowan y Frederick Reines comprobaron experimentalmente su existencia. Desde entonces el interés por los neutrinos ha sido creciente, hasta el punto de llegar a convertirse en piezas fundamentales para entender el Universo en su escala más pequeña, y en elementos básicos para investigar algunos de los problemas candentes de la Astrofísica y de la Cosmología.

Los neutrinos, por carecer de carga, no son desviados por los campos electromagnéticos y apenas son perturbados por la materia que cruzan en su camino. De hecho, enormes cantidades de neutrinos procedentes del cosmos y, en particular del Sol, atraviesan la Tierra cada segundo. Sin embargo, sólo unos pocos interactúan con algún núcleo dando como resultado la producción de otras partículas: electrones, muones y tauones.

Como más adelante se explica, estas partículas cargadas, si son suficientemente energéticas, provocan la emisión de una luz azulada conocida como *radiación de Cherenkov* (luz característica en las piscinas de almacenamiento de material irradiado de las centrales nucleares). Si el medio en el que se propagan es transparente, como agua o hielo de gran pureza, esta luz se puede detectar y su medida constituye un método indirecto para la detección de neutrinos. Este es el fundamento de buena parte de los observatorios de neutrinos existentes en el mundo. Como la probabilidad de que algún neutrino sea “cazado” es tanto mayor cuanto mayor sea el tamaño y la masa de los detectores, los “observatorios” de neutrinos son gigantescas instalaciones y su construcción constituye un inmenso reto tecnológico.

En estos ejercicios, de forma muy simplificada, se hace alusión al mayor de ellos, el IceCube Neutrino Observatory, situado en la Antártida, en la base Amundsen-Scott, cercana al Polo Sur geográfico. En este laboratorio se presta especial atención a los muones generados por los neutrinos ya que, mediante un complejo sistema de adquisición de datos, se puede determinar la dirección de propagación y energía de los neutrinos que los han producido.

Básicamente, el IceCube es una red tridimensional de detectores, llamados DOM (Digital Optical Module). Tienen forma esférica y se alojan distribuidos en 86 pozos excavados en el hielo austral. Cada DOM alberga un fotomultiplicador y los equipos electrónicos asociados. Estos se disponen formando cadenas, como se muestra en la figura 1, y están situados a una profundidad entre 1450 m y 2450 m, donde el hielo es extraordinariamente puro y transparente.

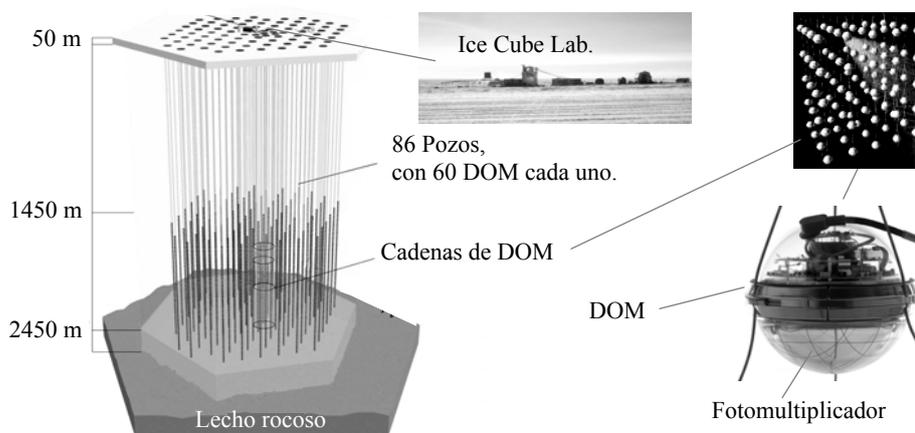


Fig. 1

Problema 1. A la caza del neutrino¹

(7 puntos)

a) La construcción del IceCube.

La excavación de los pozos se terminó en diciembre de 2010, tras casi cinco años de trabajo. Los primeros 50 m de profundidad de cada pozo son de nieve compactada y el resto, hasta 2450 m, es hielo. Fundir la nieve es relativamente sencillo, pero cuando se llega al hielo la dificultad es mucho mayor. Para su realización se utilizó agua a presión y a temperatura casi de ebullición. El agua que se obtenía al derretirse el hielo se recirculaba a la superficie donde se calentaba y se utilizaba de nuevo para seguir perforando. El tamaño de cada DOM es aproximadamente el de una pelota de baloncesto, con una gran resistencia mecánica para soportar las durísimas condiciones a las que está sometido.

a1) Cada pozo tiene una profundidad media $H = 2,40 \times 10^3$ m y un radio $r = 0,30$ m, y la temperatura media del hielo a fundir es $T_h = -30$ °C. Escriba la expresión de la mínima energía que es preciso invertir para fundir el hielo de cada pozo, E_{\min} , y calcule su valor.

b) El Sol fuente de energía y emisor de neutrinos.

El Sol produce energía mediante procesos de fusión de protones (^1H) que dan lugar a la formación de núcleos de ^4He y que tienen lugar en su interior a elevadísima presión y temperatura. El principal de estos procesos de fusión es el llamado *ciclo protón-protón* (ciclo pp), que se representa de forma esquemática en la figura 2

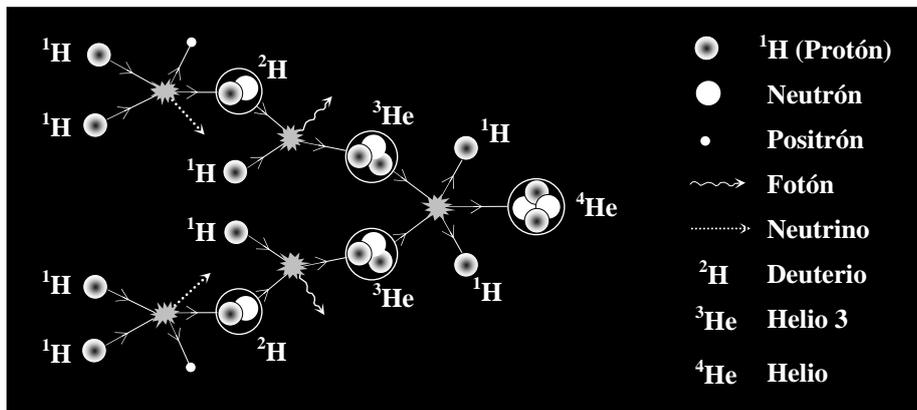


Fig. 2

Entre los productos iniciales y finales del proceso, hay una pérdida de masa Δm que da lugar a una liberación de energía ΔE . Esta energía se la llevan mayoritariamente los fotones producidos, que acaban saliendo como radiación por la superficie solar y alcanzan la Tierra. Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta la energía de los neutrinos, que es una aproximación razonable para los neutrinos de baja energía emitidos en los ciclos pp, ni la masa (energía) de los positrones generados.

b1) Escriba la expresión para Δm y calcule la energía liberada en cada ciclo pp, ΔE .

Una forma indirecta de conocer el número de neutrinos que emite el Sol se basa en la medida de la *constante solar*, u_s . Esta constante es la cantidad de energía recibida en forma de radiación solar, por unidad de tiempo y de superficie, medida en la parte externa de la atmósfera terrestre y en un plano perpendicular a los rayos del Sol. Su valor es $u_s = 1,366 \text{ kW/m}^2$

b2) Aceptando que la energía emitida por el Sol proviene exclusivamente de los ciclos pp, calcule el número de neutrinos que el Sol emite cada segundo, N_ν .

¹ Este ejercicio está dedicado a la Dra. María Luisa Sarsa, su inspiradora, que forma parte del equipo investigador del Laboratorio Subterráneo de Canfranc (Huesca, España). Desde la Antártida, el ejercicio ha sido supervisado por el Dr. Carlos Pobes, español adscrito a la Universidad de Wisconsin – Madison y *Winter Over* del experimento IceCube

c) Neutrinos y muones.

Los neutrinos, que provienen en su inmensa mayoría del Sol, atraviesan continuamente la Tierra y no pueden ser detectados directamente. Para medirlos se han diseñado detectores específicos basados en procesos radioquímicos (Homestake y Gallex) o en el efecto Cherenkov en agua (Sudbury, Kamiokande, etc) eficaces también para detectar neutrinos de origen cósmico. El gigantesco IceCube pertenece al segundo tipo y los neutrinos se detectan indirectamente cuando alguno de ellos interacciona con un átomo de oxígeno del hielo. Estas interacciones dan lugar a otras partículas y, de ellas, son los muones las que mejor se detectan. Los muones, que son similares al electrón pero más pesados, son partículas cargadas e inestables. Su vida media², medida en el sistema de referencia en el que el muón está en reposo, es $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$.

- c1) Escriba la expresión de la velocidad de un muón, v_μ , en función de su masa m_μ , de su energía E_μ y de la velocidad de la luz en el vacío, c . Calcule su valor cuando la energía del muón es $E_\mu = 1,5 \times 10^3 \text{ MeV}$.

Como consecuencia de las interacciones de los rayos cósmicos con núcleos de átomos de la alta atmósfera también se originan allí muones, que después llegan al IceCube. Estos muones deben ser tenidos en cuenta para “descontarlos”, ya que no han sido originados por neutrinos.

- c2) Calcule la distancia d_μ , medida por un observador en la Tierra, que un muón originado en la alta atmósfera puede recorrer en la atmósfera antes de desintegrarse, suponiendo que se mueve con la velocidad calculada en el apartado anterior (c1).

Constantes y Datos físicos	
Calor específico del hielo	$C_h = 2,11 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$
Calor latente de fusión del hielo	$L_h = 3,34 \times 10^5 \text{ J/kg}$
Densidad del hielo	$\rho_h = 9,17 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$
Distancia Sol-Tierra	$R_{\text{ST}} = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
Masa del protón (${}^1\text{H}$)	$m_{1\text{H}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del núcleo de Helio (${}^4\text{He}$)	$m_{4\text{He}} = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa del electrón	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del muón	$m_\mu = 207 m_e$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Ayuda
Energía mecánica relativista de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v : $E = \gamma m c^2$, donde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$
Dilatación del tiempo: $\tau = \gamma \tau_0$

² La vida media es el promedio de vida de una partícula antes de desintegrarse.

Solución P1

- a1) La energía mínima necesaria para fundir el hielo de uno de los pozos es la requerida para transformar la masa de hielo M_h , que se encuentra a una temperatura media $T_h = -30^\circ\text{C}$, en agua a $T_a = 0^\circ\text{C}$. Es decir,

$$E_{min} = C_h M_h (T_a - T_h) + L_h M_h$$

Como $M_h = \pi r^2 H \rho_h$, resulta

$$\boxed{E_{min} = \pi r^2 H \rho_h [C_h (T_a - T_h) + L_h]} \Rightarrow \boxed{E_{min} = 2,47 \times 10^{11} \text{ J}}$$

- b1) En cada ciclo pp, representado en la figura 2, intervienen 6 protones, pero en la fusión de los núcleos de Helio 3 se liberan dos. Luego la masa inicial y final en el proceso es:

$$M_{inicial} = 6 m_{1\text{H}}$$

$$M_{final} = 2 m_{1\text{H}} + m_{4\text{He}}$$

Como $M_{final} - M_{inicial} < 0$, la pérdida de masa Δm es:

$$\boxed{\Delta m = 4 m_{1\text{H}} - m_{4\text{He}}} \Rightarrow \Delta m = 4,00 \times 10^{-29} \text{ kg}$$

Por lo que la energía liberada en cada ciclo pp es

$$\Delta E = \Delta m c^2 \Rightarrow \boxed{\Delta E = 3,60 \times 10^{-12} \text{ J}}$$

- b2) La energía que emite el Sol cada segundo, se calcula como el producto de la constante solar por el área de la superficie esférica de radio la distancia Sol-Tierra,

$$W_S = 4\pi R_{ST}^2 u_S \Rightarrow W_S = 3,81 \times 10^{26} \text{ W}$$

Aceptando que esta energía proviene exclusivamente de la emitida en los ciclos pp, y como en cada ciclo se emiten dos neutrinos, el número de neutrinos emitidos por segundo, N_ν , es

$$N_\nu = 2 \frac{W_S}{\Delta E} \Rightarrow \boxed{N_\nu = 2,12 \times 10^{38} \text{ neutrinos/s}}$$

- c1) La energía mecánica relativista del muón es $E_\mu = \gamma m_\mu c^2$. Por tanto, la velocidad del muón es

$$\boxed{v_\mu = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{E_\mu} \right)^2}} \Rightarrow \boxed{v_\mu = 0,998 c = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

- c2) La vida media del muón medida por un observador en la Tierra (tiempo dilatado), τ , es

$$\tau = \tau_0 \gamma \Rightarrow \tau = 3,11 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Luego la distancia que, en promedio, recorre un muón originado en la alta atmósfera hasta que se desintegra, medida en el sistema de referencia de la Tierra, es

$$d_\mu = v_\mu \tau \Rightarrow \boxed{d_\mu = 9,31 \times 10^3 \text{ m}}$$

P1. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a1	$E_{min} = \pi r^2 H \rho_h [C_h (T_a - T_h) + L_h]$	$E_{min} = 2,47 \times 10^{11} \text{ J}$	0,7 + 0,3
b1	$\Delta m = 4m_{\text{H}} - m_{\text{He}}$	$\Delta E = 3,60 \times 10^{-12} \text{ J}$	1 + 0,5
b2		$N_\nu = 2,12 \times 10^{38} \text{ neutrinos/s}$	2
c1	$v_\mu = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{E_\mu} \right)^2}$	$v_\mu = 0,998 c = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}$	1 + 0,5
c2		$d_\mu = 9,31 \times 10^3 \text{ m}$	1

Problema 2. La detección indirecta de los neutrinos en el IceCube.

(7 puntos)

a) La radiación de Cherenkov.

En las escasas interacciones de los neutrinos con los núcleos del hielo antártico, se originan *muones* que son partículas cargadas relativistas, es decir que viajan con una velocidad próxima a la de luz en el vacío, c . Por tener carga eléctrica, excitan a los átomos de la materia (hielo, en este caso) que encuentran a su paso. Los átomos excitados vuelven casi inmediatamente a su estado fundamental emitiendo luz (radiación de Cherenkov), que se propaga en el hielo con una velocidad menor que c . El hielo tiene un índice de refracción, n_h , dado en la Tabla de Constantes Físicas. La región de emisión (no los átomos) se desplaza con el muón, a velocidad mayor que la de la luz en el hielo. En virtud del principio de Huygens-Fresnel, el frente de onda luminoso resultante es una superficie cónica, como se representa en la figura 3.

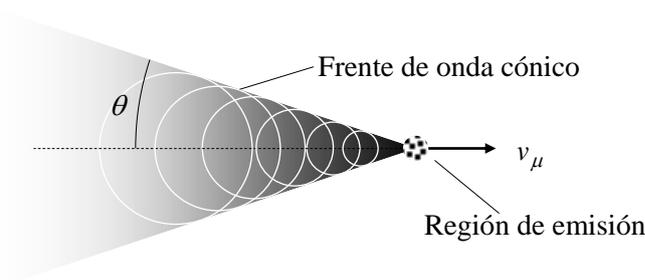


Fig. 3

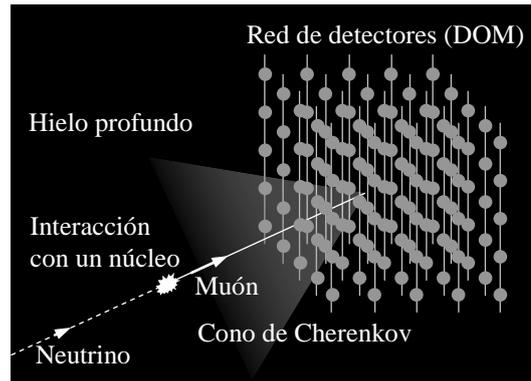


Fig. 4

a1) Escriba la expresión y calcule el semiángulo θ del frente de onda cónico en función de v_μ y de n_h .

b) La detección de la luz de Cherenkov.

La detección de la luz Cherenkov en el IceCube, que constituye la forma indirecta de detección de los neutrinos, se lleva a cabo mediante los 5160 DOM alojados en el hielo profundo (figura 4). En cada DOM existe un *fotomultiplicador* que transforma los fotones de luz de Cherenkov en una señal eléctrica que, una vez digitalizada, se envía al centro de control para ser registrada y analizada.

Aunque los fotomultiplicadores empleados en los DOM tienen una geometría diferente, son básicamente análogos al representado en la figura 5. Un fotomultiplicador consta de un *fotocátodo* que, por efecto fotoeléctrico, emite electrones (*fotoelectrones*) cuando sobre él inciden fotones de energía igual o mayor que la *función de trabajo* (o *energía de extracción*) del material con el que está construido. Un campo eléctrico acelera estos electrones y los dirige hacia un ánodo, que en estos dispositivos recibe el nombre de *dínodo*. La energía de los electrones incidentes provoca la emisión de un número mayor de *electrones secundarios* que son dirigidos hacia un segundo dínodo. El número de dínodos, su disposición y las diferencias de potencial existentes entre ellos, varían con el modelo de fotomultiplicador.

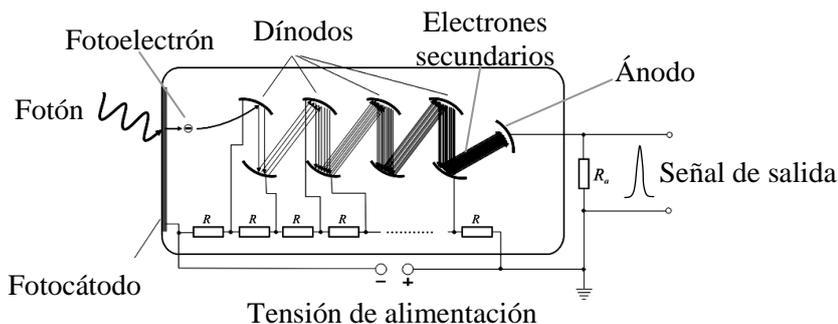


Fig. 5

Al final, tras este proceso en cascada, donde el número de fotoelectrones es multiplicado por las emisiones secundarias, la señal de salida que se obtiene en el último dínodo (ánodo propiamente dicho), es proporcional al número de fotones incidentes en el fotocátodo.

- b1) Teniendo en cuenta la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, determine la función de trabajo del material del fotocátodo, Φ , para que un fotón de luz de Cherenkov, de longitud de onda en el vacío $\lambda = 420 \text{ nm}$, sea capaz de extraer un electrón.
- b2) Si el número de fotones de longitud de onda λ que inciden por unidad de tiempo en el fotocátodo es N_f , determine la energía por unidad de tiempo (potencia, P_f) que estos fotones depositan en el fotocátodo.

Las principales características técnicas de los fotomultiplicadores son: el número de dínodos, n , la *eficiencia cuántica* (Quantum Efficiency), la *sensibilidad radiante* y la *ganancia*.

La eficiencia cuántica, QE , es el porcentaje del número de electrones que salen del fotocátodo por segundo, N_e , respecto al número de fotones que inciden por segundo, N_f .

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100$$

La sensibilidad radiante, S , para una determinada longitud de onda de la luz incidente, es el cociente entre la intensidad de corriente que sale del fotocátodo, I_e , y la potencia de la radiación de fotones que inciden en el fotocátodo, P_f .

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

La ganancia, G , se define como el cociente entre la intensidad de corriente que llega al ánodo, I_a , y la que sale del fotocátodo, I_e .

$$G = \frac{I_a}{I_e}$$

- b3) Determine la expresión de la ganancia G del fotomultiplicador en función del número de dínodos, n . Considere que en cada dínodo, en promedio, se producen δ electrones secundarios por cada electrón incidente. Calcule δ para un fotomultiplicador de 10 dínodos con una ganancia $G = 1,0 \times 10^9$.
- b4) Obtenga la expresión que relaciona la eficiencia cuántica, QE , con la sensibilidad radiante, S .
- b5) Los fotomultiplicadores empleados en el IceCube tienen una ganancia $G = 1,0 \times 10^9$ y una eficiencia cuántica $QE = 25$. Si inciden fotones Cherenkov de longitud de onda $\lambda = 420 \text{ nm}$, calcule la relación entre la intensidad de corriente I_a que sale del ánodo y la potencia P_f de la radiación incidente.

Constantes físicas	
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Índice de refracción del hielo	$n_h = 1,32$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Carga elemental	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Solución P2

- a1) En un cierto instante, el conjunto de átomos excitados por el muón están en el punto A de la figura 6. Al cabo de un cierto tiempo t , la luz que emiten alcanza los puntos de una esfera de radio igual a $c_h t$.

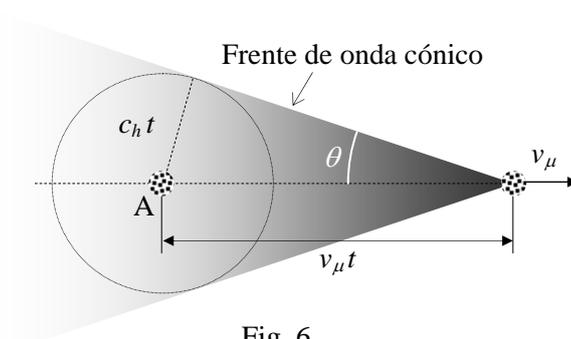


Fig. 6

En ese tiempo, la región con átomos excitados se ha desplazado una distancia $v_\mu t$. En instantes intermedios los frentes de onda de la luz emitida son esferas de radio proporcionalmente menor. De acuerdo con el principio de Huygens-Fresnel, el frente de ondas resultante es la envolvente de los frentes secundarios, precisamente la superficie cónica representada.

De la figura 5,

$$\text{sen } \theta = \frac{c_h t}{v_\mu t} \quad \text{y como} \quad n_h = \frac{c}{c_h}, \quad \text{se tiene}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{c}{n_h v_\mu}$$

De donde, finalmente

$$\theta = \text{arsen} \left(\frac{c}{n_h v_\mu} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta = 49,4^\circ$$

- b1) La ecuación de Einstein para la emisión fotoeléctrica es

$$h f = \Phi + E_c$$

Donde h es la constante de Planck, f la frecuencia del fotón, Φ la función de trabajo y E_c la energía cinética de los electrones emitidos.

Para que un fotón extraiga, sin energía cinética, un electrón del fotocátodo, la función de trabajo deberá ser

$$\Phi = h f = h \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \Phi = 4,74 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,96 \text{ eV}$$

- b2) Si al fotocátodo inciden N_f fotones por unidad de tiempo y cada uno de ellos transporta una energía $h f = hc / \lambda$, la potencia que depositan es

$$P_f = N_f \frac{h c}{\lambda} \quad (1)$$

b3) El fotoelectrón que alcanza el primer dínodo, produce δ electrones secundarios. Cada uno de estos, cuando alcanzan el 2º dínodo producirán δ electrones secundarios; es decir, del 2º dínodo saldrán δ^2 electrones, y así sucesivamente. El número de electrones que alcanzan el ánodo, procedentes del n-esimo dínodo será δ^n . Por lo tanto, la ganancia es

$$G = \delta^n$$

Por tanto,

$$\delta = G^{1/n}$$

Si $n = 10$ y $G = 1.0 \times 10^9$, resulta

$$\delta = 7,94 \approx 8$$

b4) Por una parte, tal como dice el enunciado, la eficiencia cuántica es

$$QE = \frac{N_e}{N_f} \times 100 \quad (2)$$

donde N_e y N_f son, respectivamente, el número de fotoelectrones emitidos por segundo y el número de fotones, de una determinada longitud de onda, que inciden por segundo en el fotocátodo.

Por otra parte, la sensibilidad radiante, para una determinada longitud de onda de los fotones de la luz incidente, viene dada por la relación entre la corriente de fotoelectrones que llegan al ánodo, I_e , y la potencia de la radiación de fotones que llegan al fotocátodo, P_f .

$$S = \frac{I_e}{P_f}$$

Teniendo en cuenta (1) y que la corriente de fotoelectrones es $I_e = e N_e$, se puede escribir

$$S = \frac{N_e e}{N_f h c} \lambda \quad (3)$$

Eliminando el cociente N_e / N_f entre (2) y (3), resulta finalmente

$$QE = 100 \frac{h c}{e \lambda} S \quad (4)$$

b5) Dado que $G = I_a / I_e$ y $S = I_e / P_f$, se puede escribir

$$S = \frac{I_a}{G P_f} \Rightarrow \frac{I_a}{P_f} = G S$$

La sensibilidad radiante S para una longitud de onda λ se obtiene de (4).

$$\frac{I_a}{P_f} = QE \frac{e}{100 h c} G \lambda$$

Si $QE = 25$, $\lambda = 420 \text{ nm} = 4,20 \times 10^{-7} \text{ m}$ y $G = 1,0 \times 10^9$, el valor de la relación entre la intensidad de corriente de salida y la potencia de la luz que incide en el fotocátodo resulta

$$\frac{I_a}{P_f} = 8,45 \times 10^7 \text{ A/W}$$

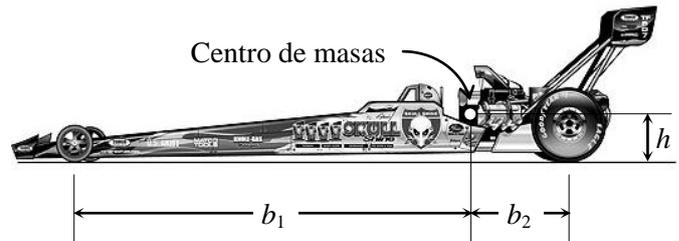
P 2. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a1	$\theta = \arcsin\left(\frac{c}{n_h v_\mu}\right)$	$\theta = 49,4^\circ$	0,7+ 0,3
b1		$\Phi = 4,74 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,96 \text{ eV}$	1
b2	$P_f = N_f \frac{hc}{\lambda}$		1,5
b3	$G = \delta^n$	$\delta = 7,94 \approx 8$	0,7+ 0,3
b4	$QE = 100 \frac{hc}{e \lambda} S$		1,5
b5		$\frac{I_a}{P_f} = 8,45 \times 10^7 \text{ A/W}$	1

Problema 3. Dragster ¹.

(8 puntos)

Los *dragster* son una especie de coches alargados que compiten en carreras de aceleración, en las que en cortos recorridos rectos alcanzan elevadas velocidades en pocos segundos. En la fotografía adjunta de uno de estos engendros, se muestra con un círculo blanco la posición del centro de masas y algunos parámetros geométricos que necesitaremos.



Aunque juegan un papel muy importante, para simplificar el problema, no se va a tener en cuenta la influencia de los elementos aerodinámicos (alergones) que hay tanto en la parte anterior como en la posterior del dragster. Se considera que en todo momento las ruedas motrices ruedan sin deslizar.

La fuerza de rozamiento entre la pista y las ruedas motrices (las posteriores, naturalmente) es la que hace avanzar el coche. Lógicamente, para que la aceleración sea máxima interesa que dicha fuerza de rozamiento lo sea también.

- Haga un dibujo esquemático del dragster indicando las fuerzas exteriores que actúan sobre él durante el proceso de aceleración.
- Sin tener en cuenta ningún tipo de fuerza de resistencia, salvo la de rozamiento con la pista, y tomando como coeficiente de rozamiento $\mu = 0,90$ y como valor de la aceleración de la gravedad $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, obtenga la expresión de la aceleración máxima del vehículo, a_{max} , y calcule su valor.

La distribución de las fuerzas, es decir las relaciones entre b_1 , b_2 y h son determinantes para lograr la máxima aceleración.

- Determine la relación que debe existir entre b_2 y h para que la aceleración sea máxima sin que el dragster haga el “caballito”, es decir, manteniendo las cuatro ruedas sobre el suelo durante todo el recorrido.
- Si la longitud de la pista es $L = 400 \text{ m}$, determine las expresiones de la velocidad al final del recorrido, V_f , y del tiempo transcurrido en el recorrido, T_f , y calcule sus valores. Considere que en todo momento el vehículo se mueve con la aceleración máxima.

Una vez recorrida la pista de aceleración, cuando se supone que su velocidad es la máxima, V_f , los dragster despliegan un paracaídas² para frenar. La fuerza de resistencia que ejerce el paracaídas es:

$$F_R = \frac{1}{2} \rho S C_D v^2$$

En la que v es la velocidad del dragster, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ es la densidad del aire, $S = 3,0 \text{ m}^2$ la superficie que el paracaídas presenta al flujo de aire y $C_D = 1,2$ un coeficiente, llamado *de forma*, que supondremos independiente de la velocidad.

- Si la masa del dragster es $M = 1,5 \times 10^3 \text{ kg}$ y despreciando cualquier otra fuerza de rozamiento, determine el tiempo T_p que transcurre desde que el piloto abre el paracaídas hasta que la velocidad del dragster se reduce en un 50%, es decir a un valor $V_p = V_f / 2$.

Ayuda: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$

¹ “Classical Mechanis. A Modern Perspective”, V. Barger y M. Olsson. McGraw-Hill. 1994

² Suelen ser dos paracaídas en paralelo pero, para simplificar, supondremos que es uno.

Solución P3

- a) Considerando como sistema mecánico el propio dragster y suponiendo que su masa es M , las únicas fuerzas exteriores que actúan sobre él son el peso Mg , las fuerzas de rozamiento F_{r1} y F_{r2} , y las reacciones normales N_1 y N_2 . Naturalmente y de acuerdo con el enunciado, no se contemplan las fuerzas aerodinámicas en los alerones ni la resistencia del aire.

En la figura 1 se representa esquemáticamente un dragster y se indica la posición del centro de masas, los parámetros geométricos característicos y las fuerzas exteriores antes mencionadas.

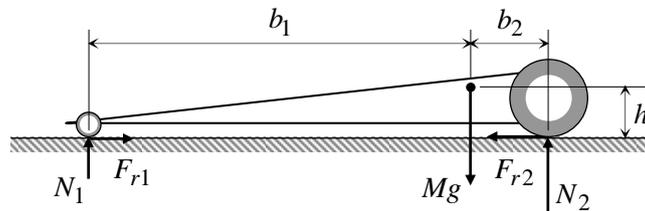


Fig. 1

- b) La única fuerza que impulsa al artefacto es la fuerza de rozamiento F_{r2} que actúa sobre las ruedas motrices traseras, por tanto, definiendo como positiva la dirección hacia la izquierda, la fuerza neta horizontal es

$$F = F_{r2} - F_{r1}$$

por lo que, en virtud de la 2ª ley de Newton,

$$Ma = F_{r2} - F_{r1}$$

La aceleración del dragster será máxima cuando F_{r2} sea máxima y F_{r1} mínima, es decir

$$(F_{r2})_{\max} = \mu N_2$$

que corresponde a la rodadura pura de la ruedas motrices (en la práctica la rueda “desliza”, patina sobre la pista, se calienta y desprende una gran humareda).

$$(F_{r1})_{\min} = 0$$

Esto significa que las ligeras ruedas delanteras pierden el contacto con la pista¹, es decir, $N_1 = 0$. En esta situación límite, el “coche” está a punto de hacer el “caballito”. De hecho, frecuentemente lo hacen, llegando incluso a volcar.

$$Ma_{\max} = \mu N_2 = \mu Mg \Rightarrow \boxed{a_{\max} = \mu g} \Rightarrow \boxed{a_{\max} = 8,8 \text{ m/s}^2}$$

- c) En estas condiciones óptimas, el dragster debe avanzar manteniéndose horizontal, por lo que, en todo su recorrido, la velocidad angular de giro en torno a su centro de masas debe ser constantemente nula y, por consiguiente, nula su aceleración angular. Para que esto ocurra, el momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas tiene que ser cero, de donde se deduce la relación geométrica que se pide,

¹ Lógicamente esta condición se alcanzará tanto más fácilmente cuando, con el dragster en reposo, la normal N_1 sea lo menor posible. De acuerdo con ello, las condiciones de equilibrio imponen, por una parte, que $N_1 + N_2 = Mg$ y por otra, que el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al centro de masas sea nulo, esto es, $N_1 b_1 - N_2 b_2 = 0$. De estas expresiones se deduce que, cuando el “coche” está en reposo, la reacción normal en las ruedas delanteras es $N_1 = Mg b_2 / (b_1 + b_2)$.

La reacción N_1 será tanto menor cuanto mayor sea $b_1 + b_2$ y cuanto menor sea b_2 . Lógicamente la distancia b_2 no puede ser nula lo que implica que b_1 ha de ser suficientemente grande, o lo que es igual, el diseño del dragster debe ser muy alargado y con la mayor parte del peso (motor, piloto etc), y el eje de las ruedas traseras lo más atrasados posible.

$$F_{r2} h - N_2 b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu N_2 h - N_2 b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{b_2}{h} = \mu}$$

d) Como la aceleración es constante y el dragster parte del reposo, se tiene que

$$\left. \begin{aligned} v &= a_{\max} t \\ x &= \frac{1}{2} a_{\max} t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_{fin} &= a_{\max} T_f \\ L &= \frac{1}{2} a_{\max} T_f^2 \end{aligned} \right\}$$

Teniendo en cuenta la expresión de a_{\max} , resulta

$$\boxed{V_f = \sqrt{2L\mu g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_f = 84 \text{ m/s} \approx 300 \text{ km/h}}$$

$$\boxed{T_f = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_f = 9,5 \text{ s}}$$

e) En las condiciones que establece el enunciado para el proceso de frenado con paracaídas, por la 2ª ley de Newton se tiene que

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \rho S C_D v^2 = -K v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{K}{M} dt$$

Tomando ahora como instante inicial el de apertura del paracaídas cuando la velocidad del dragster es V_f y como instante final T_p en el que la su velocidad es V_p ,

$$\int_{V_f}^{V_p} \frac{dv}{v^2} = -\frac{K}{M} \int_0^{T_p} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_p} = -\frac{K}{M} T_p$$

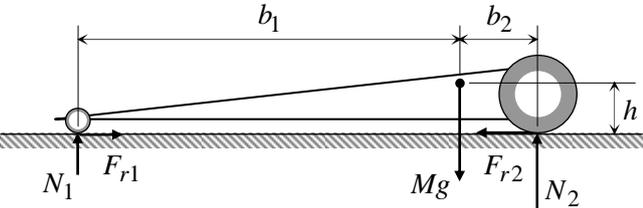
De donde

$$T_p = \frac{M(V_f - V_p)}{K V_f V_p} = \frac{2M}{\rho S C_D} \frac{V_f - V_p}{V_f V_p}$$

Como $V_p = V_f / 2$, tal como indica el enunciado, resulta finalmente

$$\boxed{T_p = \frac{2M}{\rho S C_D V_f}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_p = 8,3 \text{ s}}$$

P3. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a	 <p style="text-align: center;">Fig. 1</p>		2,0
b	$a_{\max} = \mu g$	$a_{\max} = 8,8 \text{ m/s}^2$	0,7+0,3
c	$\frac{b_2}{h} = \mu$		1,5
d	$V_f = \sqrt{2L\mu g}$ $T_f = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}$	$v_f = 84 \text{ m/s} \approx 300 \text{ km/h}$ $T_f = 9,5 \text{ s}$	1,75 +0,75
e	$T_p = \frac{2M}{\rho S C_D V_f}$	$T_p = 8,3 \text{ s}$	0,75+0,25

Problema 4. La bobina de inducción o carrete de Ruhmkorff.

(8 puntos)

La bobina de inducción construida por Ruhmkorff en 1851, antes del invento de los transformadores propiamente dichos, es un dispositivo destinado a producir en un circuito secundario una fuerza electromotriz (fem) inducida mucho mayor que la fem aplicada en un circuito primario. En la figura 1 se muestra una fotografía de un carrete de Ruhmkorff.

Las bobinas de inducción fueron básicas en los albores de los rayos X y de la “telefonía sin hilos”. Se han usado y todavía se usan en los motores de explosión para producir la chispa en las bujías.

Tal como se muestra en el esquema de la figura 2, el carrete consta esencialmente de un arrollamiento *primario*, formado por varias espiras de hilo grueso de cobre, aisladas entre sí y arrolladas sobre un núcleo de hierro dulce. Sus terminales se conectan a un generador de corriente continua de tensión V_p , intercalando un interruptor que continuamente abre y cierra el circuito de un modo automático.

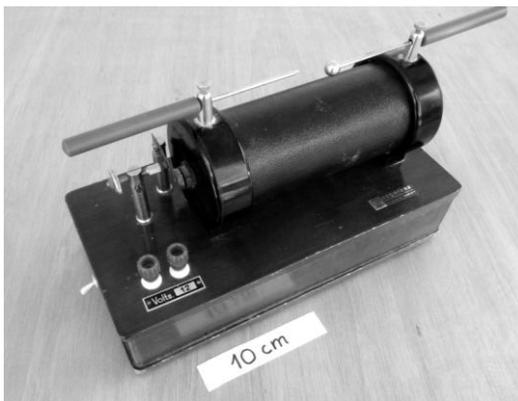


Fig. 1

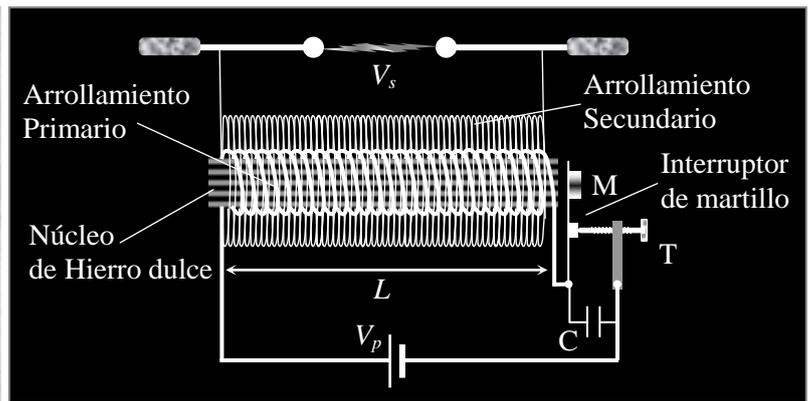


Fig. 2

Otro arrollamiento, llamado *secundario*, va dispuesto sobre el primario y está constituido por un gran número de espiras de hilo fino, muy bien aisladas eléctricamente entre sí y con el primario, cuyos terminales constituyen los bornes de la bobina, entre los cuales habrá un voltaje $V_s \gg V_p$.

En el carrete esquematizado en la figura 2, la bobina del primario tiene una longitud L y está formada por N_p espiras circulares de diámetro D_p . Estas espiras son de hilo de cobre, de resistividad ρ y de sección circular con diámetro d_p . Considerando que el circuito primario está cerrado:

- Obtenga la expresión de la intensidad de corriente continua que circularía por el primario, I_0 , si estuviese constantemente conectado a la batería de fem V_p .
- Si la corriente que circula por el primario es I_0 , despreciando los efectos de los extremos del arrollamiento, es decir, considerando al primario como un solenoide largo, obtenga la expresión del campo magnético dentro del solenoide, sin tener en cuenta el núcleo, B_0 .

Considere en adelante que en el interior del primario hay un núcleo de hierro dulce formado por un manojó de alambres aislados entre sí para reducir las pérdidas producidas por corrientes de Foucault. Su misión es aumentar la intensidad del campo magnético B_0 que crearía el primario sin núcleo hasta un valor $B = \mu_r B_0$. La relación entre las permeabilidades magnéticas relativa, μ_r , y absoluta, μ , del material del núcleo es $\mu_r = \mu / \mu_0$.

En la figura 2 aparece un interruptor de *martillo*. Su funcionamiento es simple: al pasar la corriente por el primario, la armadura M, montada sobre una lámina flexible, es atraída por el núcleo y se separa del tornillo T, con lo que el circuito primario se abre y la corriente tiende a anularse. En ese momento, cesa la atracción porque el núcleo se desmagnetiza (hierro dulce) y M vuelve a la posición inicial en la que el contacto del tornillo T cierra de nuevo el circuito.

Para evitar en parte las chispas que se forman entre los contactos en las interrupciones periódicas, se coloca un condensador (capacitor) C, que no se tendrá en cuenta en el desarrollo de este ejercicio.

Como el interruptor de martillo abre y cierra el circuito periódicamente, la corriente del primario es variable con el tiempo, $I_p(t)$, y lo hace periódicamente con una frecuencia $f = 1/T$.

La dependencia con el tiempo de I_p es difícil de describir analíticamente. Por sencillez, supondremos que varía con el tiempo como se muestra en la figura 3: en cada periodo T , la corriente crece linealmente desde 0 hasta I_0 en el intervalo $0 < t < 4T/5$ y decrece desde I_0 hasta 0 en el intervalo $4T/5 < t < T$. En consecuencia, el campo magnético creado también variará con el tiempo, $B(t)$.

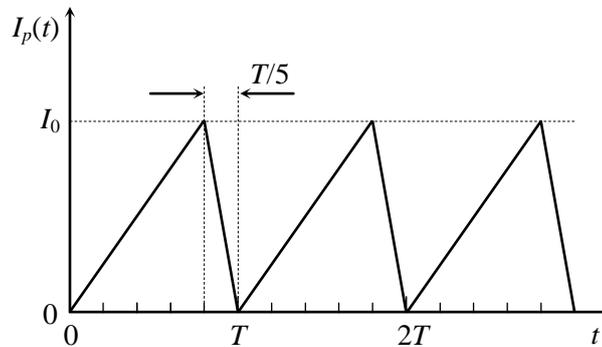


Fig. 3

- Determine las expresiones de la fem inducida en el circuito secundario, $V_{s,1}$ y $V_{s,2}$, en los intervalos de tiempo $0 < t < 4T/5$ y $4T/5 < t < T$, respectivamente.
- Con los valores numéricos de la Tabla de datos, calcule los valores de $V_{s,1}$ y $V_{s,2}$.
- Haga una representación gráfica de la fem inducida en el secundario, V_s , en función del tiempo.

Tabla de datos	
Fem de la batería	$V_p = 12,0 \text{ V}$
Longitud de la bobina	$L = 15,0 \text{ cm}$
Diámetro de las espiras del primario	$D_p = 2,00 \text{ cm}$
Diámetro del hilo del primario	$d_p = 0,600 \text{ mm}$
Resistividad del Cobre	$\rho = 1,70 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \text{ m}$
Frecuencia del interruptor	$f = 1/T = 100 \text{ Hz}$
Permeabilidad magnética del vacío	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
Permeabilidad magnética relativa del núcleo	$\mu_r = 300$
Número de espiras del secundario	$N_s = 25\,000$

Solución P4

- a) El arrollamiento primario tiene una longitud de hilo $l = N_p 2\pi D_p / 2$, cuya sección es $A = \pi d_p^2 / 4$. Por tanto, si ρ es la resistividad del hilo, su resistencia es

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{4N_p \rho D_p}{d_p^2}$$

Cuando se conecta a una batería de fem V_p , la corriente continua, I_0 que circula es

$$I_0 = \frac{V_p}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_0 = V_p \frac{d_p^2}{4N_p D_p \rho}} \quad (1)$$

- b) En un solenoide largo puede considerarse que el campo magnético que crea es uniforme y está confinado en su interior. La ley de Ampère aplicada a una línea cerrada rectangular y de longitud d , como la que se muestra en la figura 4, permite escribir

$$B_0 d = \mu_0 n_p d I_0$$

Donde n_p es el número de espiras del primario por unidad de longitud:

$$n_p = N_p / L$$

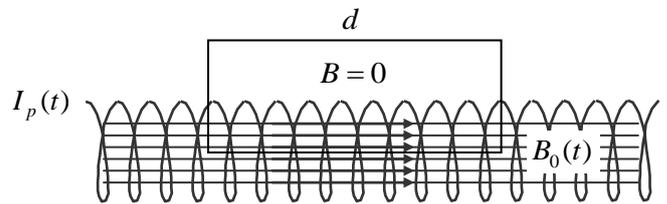


Fig. 4

Por lo que resulta,

$$B_0 = \frac{\mu_0 N_p}{L} I_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 d_p^2}{4\rho D_p L} V_p}$$

- c) Cada una de las N_s espiras del arrollamiento secundario está atravesada por el campo magnético que crea el primario reforzado por el núcleo ferromagnético $B = \mu_r B_0$. En consecuencia, el flujo a través de una espira del secundario es $B S_p$, siendo S_p la superficie normal de la región en la que se encuentra confinado el campo magnético. Esta superficie es igual a la de cada espira del primario, $S_p = \pi D_p^2 / 4$. El flujo total a través del secundario será

$$\Phi = N_s B S_p = \mu_r N_s \pi \frac{D_p^2}{4} B_0$$

Como la corriente del primario está pulsada por la acción del martillo, el campo magnético en el primario sin núcleo será ahora una función del tiempo dada por

$$B_0(t) = \frac{\mu_0 N_p}{L} I_p(t)$$

Por tanto, el flujo a través de las espiras del secundario será

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 \mu_r \pi N_p N_s D_p^2}{4L} I_p(t)$$

Como este flujo es variable con el tiempo, de acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida en el secundario, V_s , será

$$V_s = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 \mu_r \pi N_p N_s D_p^2}{4L} \frac{dI_p(t)}{dt} \quad (2)$$

En los intervalos $0 < t_1 < 4T/5$ y $4T/5 < t_2 < T$ las intensidades que circulan por el primario son, respectivamente

$$I_{p,1}(t) = \frac{5I_0}{4T} t \quad I_{p,2}(t) = -\frac{5I_0}{T} t + cte$$

En función de la frecuencia, f

$$I_{p,1}(t) = \frac{5}{4} f I_0 t \quad I_{p,2}(t) = -5 f I_0 t + cte$$

Por lo que las fem inducidas son, sustituyendo en (2),

$$V_{s,1} = -\frac{5\mu_0 \mu_r \pi N_p N_s D_p^2 f}{16L} I_0 \quad V_{s,2} = \frac{5\mu_0 \mu_r \pi N_p N_s D_p^2 f}{4L} I_0$$

Por último, teniendo en cuenta (1),

$$V_{s,1} = -\frac{5\pi \mu_r \mu_0 N_s D_p d_p^2 f}{64\rho L} V_p \quad V_{s,2} = \frac{5\pi \mu_r \mu_0 N_s D_p d_p^2 f}{16\rho L} V_p$$

d) Con los datos que se indican en la Tabla,

$$V_{s,1} = -7,84 \text{ kV} \quad V_{s,2} = 31,4 \text{ kV}$$

e) La gráfica de la fem inducida en el secundario, V_s , en función del tiempo se presenta en la figura 5.

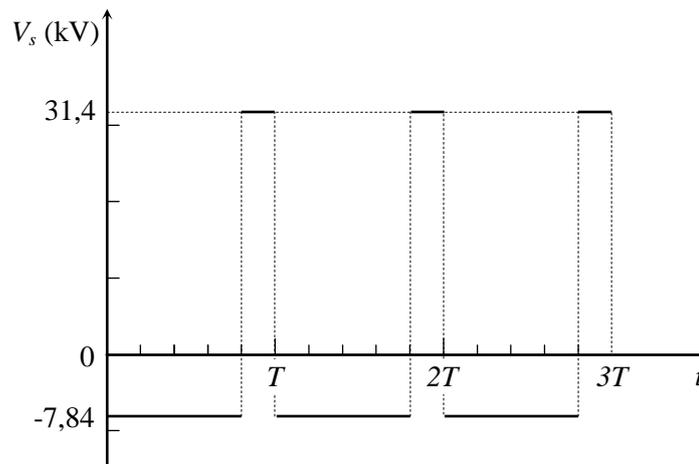
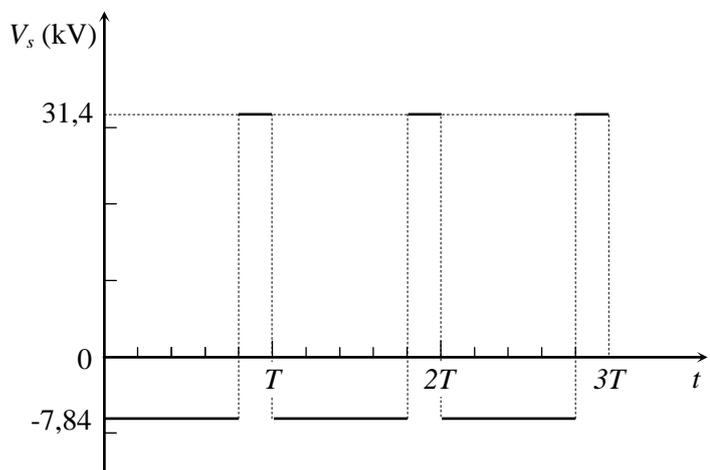


Fig. 5

P4. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a	$I_0 = V_p \frac{d_p^2}{4N_p D_p \rho}$		1
b	$B_0 = \frac{\mu_0 d_p^2}{4\rho D_p L} V_p$		1,5
c	$V_{s,1} = -\frac{5\pi \mu_r \mu_0 N_s D_p d_p^2 f}{64\rho L} V_p$ $V_{s,2} = \frac{5\pi \mu_r \mu_0 N_s D_p d_p^2 f}{16\rho L} V_p$		4
d		$V_{s,1} = -7,84 \text{ kV}$ $V_{s,2} = 31,4 \text{ kV}$	0,5
e	 <p>The graph shows the secondary voltage V_s in kV as a function of time t. The vertical axis has markings at 31,4, 0, and -7,84. The horizontal axis has markings at T, $2T$, and $3T$. The signal is a square wave that is zero from $t=0$ to T, then jumps to 31,4 kV until $t=2T$, then jumps to -7,84 kV until $t=3T$, and repeats this pattern.</p>		1