Problema 2: Fuerza de Arrastre

La fuerza de arrastre se presenta en objetos que se mueven a través de un fluido. Actúa en la dirección del movimiento relativo al fluido. La fuerza de arrastre crece con el cuadrado de la velocidad. En muchos casos, como en el diseño de automóviles se trata de minimizar dicha fuerza, sin embargo, otros dispositivos, como los paracaídas, se diseñan maximizando la fuerza de arrastre a bajas velocidades.

El estudio teórico de la fuerza de arrastre es una empresa compleja, incluso para objetos con simetría, pues no se conocen soluciones analíticas para las ecuaciones que los modelan. Sin embargo, es posible obtener información valiosa con un modelo sencillo.

Considere un modelo que consiste en un objeto macroscópico que se mueve a través de un fluido constituido por moléculas uniformemente distribuidas donde cada una está inicialmente en reposo. En este modelo la fuerza de arrastre surge exclusivamente de lascolisiones entre las moléculas y el objeto en movimiento. Dichas colisiones se suponen perfectamente elásticas.

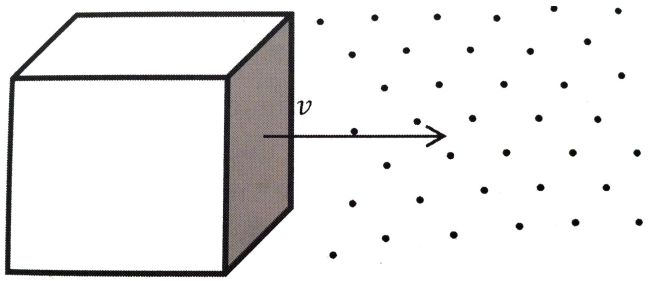

FIGURA 1

a) Un objeto de masa M y velocidad v choca frontalmente con una única molécula de masa m inicialmente en reposo. Encuentre el cambio en la velocidad Δv en el objeto debido al choque. Exprese su resultado en función de M, m y v.**(2 Puntos)**

b) Un cubo de arista L se mueve a través de un fluido con densidad ρ en dirección perpendicular a una de sus caras. Demuestre que la fuerza de arrastre F_D es:

$$F_D = 2\rho A v^2,$$

donde$v$ es la velocidad del cubo y A el área de una de sus caras. Considere que la masa m de cada una de las moléculas del fluido es mucho menor que M.**(3 Puntos)**

c) Un cubo de 10.0 cm por lado se mueve en línea recta con rapidez constante de 0.600 m/s a través de un gas formado por moléculas en reposo de O_2con densidad ρ = 1.43 kg/m^3. Calcule la potencia necesaria para que el cubo mantenga su velocidad constante.**(2 Puntos)**

d) Se quiere modificar la forma del cubo para mejorar su aerodinámica, esto es, disminuir su fuerza de arrastre en su movimiento a través del fluido. Para ello se le da forma de cuña simétrica. Para caracterizar la aerodinámica del nuevo objeto (en la figura 2 se muestra su sección transversal), se introduce un parámetro *K* en la ecuación anterior

$$F_D = 2K\rho A v^2$$

Este parámetro depende del ángulo θ (indicado en la figura 2). Note que para *K*=1, se recupera la forma de la fuerza de arrastre para el cubo. Encuentre el coeficiente *K* para el nuevo objeto si las partículas colisionan elásticamente sobre la superficie de la cuña y su masa es muy pequeña comparada con la del objeto, de modo que se produce una "reflexión especular" de las moléculas.**(3 Puntos)**

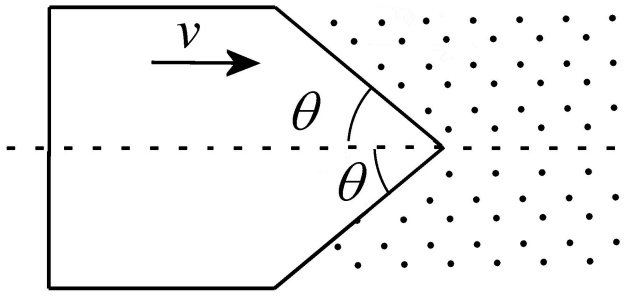

FIGURA 2

Soluciones:

a) Sea u la velocidad final de la molécula, ya que conocemos que inicialmente ésta se encontraba en reposo. Aplicando el principio de conservación del momento y la conservación de la energía cinética:

$$Mv = Mv_2 + mu,$$
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mu^2.$$

Combinando éstas dos ecuaciones obtenemos:

$$v + v_2 = u,$$

la cual sustituimos en la ecuación de conservación de momento y obtenemos:

$$v_2 = \frac{M-m}{M+m}v,$$
$$\delta v = v_2 - v = \frac{-2m}{M+m}v.$$

b) Para calcular la fuerza de arrastre solo debemos calcular la aceleración promedio que recibe el bloque. Ya tenemos el cambio de velocidad que sufre el bloque debido a un choque, solo debemos calcular ahora en qué intervalo de tiempo promedio tales choques ocurren, para poder estimar la aceleración promedio.
El tiempo entre choques en el bloque es:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v},$$

en donde δx es el desplazamiento entre choques que incurre el cubo. Durante ese tiempo la cara del bloque barre un volumen
$V = \delta x\, L^2 = \delta x\, A$.
Dividiendo δv por δt tenemos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2m}{(M+m)\frac{\delta x}{v}}v = \frac{-2m}{(M+m)\delta x}v^2,$$
$$a = \frac{-2m}{(M+m)V}Av^2 = \frac{-2}{(M+m)}\rho Av^2.$$

Finalmente:

$$F_D = |Ma| = \frac{2M}{(M+m)}\rho Av^2 \approx 2\rho Av^2.$$

Las fuerzas de arrastres regularmente se expresan siempre con signo positivo.

c) La potencia puede ser calculada usando la expresión $P = Fv$. Para mantener una velocidad constante la fuerza aplicada tiene que ser igual en magnitud a la fuerza de arrastre. Teniendo esto en cuenta, la potencia es:

$$P = F_D v = 2\rho Av^3 = 0.00618\ \text{W}$$

d) En este problema es más fácil tratarlo suponiendo que el bloque está en reposo y es tan masivo que su movimiento puede ser despreciado inicialmente, y las moléculas se mueven con velocidad inicial $-v$ (esto corresponde con un cambio en el marco de referencia). El cambio de velocidad horizontal de una partícula que choca con la cuña es:

$$\Delta u = -v\cos 2\theta - (-v) = (1 - \cos 2\theta)v.$$

El cambio de momento lineal experimentado en la molécula debe corresponderse con el bloque. Teniendo eso en cuenta, el cambio de velocidad en el bloque es:

$$\Delta v \approx (1 - \cos 2\theta)\frac{m}{M}v.$$

Siguiendo un procedimiento similar al del acápite b) obtenemos que la fuerza de arrastre es

$$F_D = (1 - \cos 2\theta)\rho A v^2,$$

Lo que nos da un coeficiente de arrastre K:

$$K = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

Nótese que para $\theta = 90°$ obtenemos el caso del acápite b), como es de esperarse.