Olimpíada Argentina de Física 2009

Instancia Nacional

Prueba Experimental

20 de Octubre de 2009

Nombre: ....

D.N.I.: ....

- Antes de comenzar a resolver la prueba lea cuidadosamente TODO el enunciado de la misma.
- Escriba su nombre y su número de D.N.I. en el sitio indicado. **No escriba su nombre en ningún otro sitio de la prueba.**
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. Ejemplo: PE 2/5 (Prueba Experimental, hoja dos de cinco).
- Si necesita más hojas pídalas al Bedel. **No use hojas personales.**
- **No escriba respuestas en las hojas del enunciado pues no serán consideradas.**
- Luego de finalizada la prueba, acomode y deje el equipo como lo encontró.
- Entregue la prueba en el sobre de papel provisto. **No escriba en éste su nombre.**

Ley de Lambert-Beer

Cuando un haz de luz atraviesa una sustancia, que contiene centros dispersores de luz, la intensidad del haz se atenúa de acuerdo con la siguiente expresión:

$I = I_0\ 10^{-\alpha C L}$ (1)

Donde I_0 es la intensidad de luz incidente, I es la intensidad de luz luego de atravesar la sustancia, L el camino recorrido por el haz a través de la sustancia, C es la concentración de centros de dispersores de luz y α el coeficiente de absorción de la sustancia.

Esta expresión es una relación empírica que se conoce como Ley de Lambert-Beer.

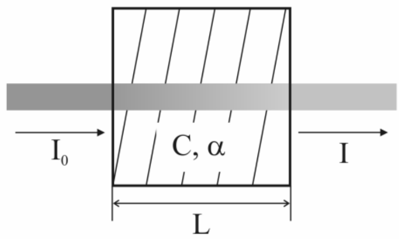


Figura 1: Atenuación de la intensidad de luz al atravesar una sustancia.

En el caso que el haz de luz atraviese una mezcla homogénea de una sustancia en agua, la intensidad del haz de luz se atenúa de acuerdo con la siguiente expresión:

$I = B\ I_0\ 10^{-\alpha C L}$ (2)

Donde B es una constante que tiene en cuenta la dispersión de luz debido al agua y C es la concentración de la sustancia en la mezcla.

Si se conocen I_0, α y L, se podrá determinar la concentración de una sustancia a partir del valor de la intensidad de luz transmitida al atravesar la mezcla de agua y sustancia.

Se propone determinar la concentración (C) de una mezcla de tinta y agua utilizando la Ley de Lambert-Beer y el coeficiente de absorción (α) de la tinta.

Parte 1: Determinar el volumen de una gota de tinta.

La concentración C de la mezcla de tinta y agua está dada por:

$C = \frac{Volumen\ de\ Tinta\ [ml]}{Volumen\ de\ Agua\ [ml]}$ (3)

El volumen de tinta para construir la mezcla estará dado por el número de gotas utilizado, las cuales son generadas por el gotero del frasco de tinta. Para conocer el valor de C, es necesario determinar el volumen de una gota de tinta en *mililitros*.

Elementos:

- Probeta graduada.
- Frasco de Tinta con Gotero

Utilizando los elementos provisto, implemente y explicite brevemente un método para determinar el volumen de una gota de tinta producida por el gotero del frasco de tinta. Determine el volumen de una gota de tinta con su error y expréselo en *mililitros*.

<u>Sugerencia:</u> Mida el volumen de un número suficientemente grande de gotas de tinta.

Parte 2: Determinar la concentración C de una mezcla de tinta y agua.

Elementos:

- Dispositivo Experimental que consta de un emisor y de un detector de luz, una cubeta plástica transparente y una fuente de corriente (Ver Figura 2).

- Multímetro.
- 2 (dos) Cables.
- Recipiente con mezcla de concentración desconocida.
- Agua.
- Frasco de Tinta con Gotero.
- Recipiente Aforado en *(200 ± 5) ml*.
- Mezclador.
- Regla.
- Recipiente.
- Papel para limpieza.
- 2 (dos) hojas milimetradas.

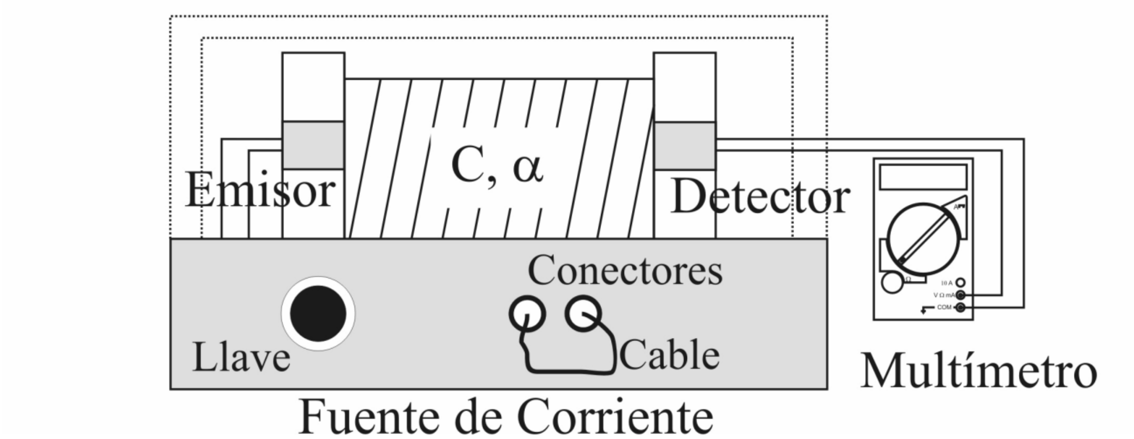


Figura 2: Dispositivo Experimental. Configuración para medir *R*.

Usando la Ley de Lambert-Beer (Ecuación 2), si I_0 es la intensidad de luz emitida por el emisor e I la intensidad de luz que llega al detector, se tiene que:

$$I = \beta\ B\ I_0\ 10^{-\alpha CL} \qquad (4)$$

Donde β es una constante que tiene en cuenta la absorción y la dispersión de luz por las paredes de la cubeta y por el aire.
La fuente de luz es un diodo emisor de luz (LED) conectado a una fuente de corriente.
La intensidad de luz emitida por el LED es proporcional a la corriente (i) que circula por el mismo:

$$I_0 = D\ i \qquad (5)$$

Entonces, la intensidad de luz que llega al detector, luego de atravesar la mezcla, estará dada por:

$$I = \beta\ B\ D\ i\ 10^{-\alpha CL} \qquad (6)$$

El detector está compuesto por una fotorresistencia conectada en paralelo a una resistencia (R_0) de tal forma que la resistencia equivalente, que se mide en el detector, sea R. La resistencia R_0 se utiliza para limitar el valor de la resistencia R.
Una fotorresistencia es un elemento electrónico cuya resistencia (R_F) depende de la intensidad I de luz que le llega, de la siguiente forma:

$$R_F = A\ I^{-a} \qquad (7)$$

Donde A y a son constantes que dependen de los materiales utilizados en la fabricación de la fotorresistencia.
El valor de R_F, debido a la intensidad de luz que llega al detector luego de atravesar la mezcla, será:

$R_F = E\ i^{-a}\ 10^{a\alpha LC}$ (8)

Donde

$E = A\ (\beta\ B\ D)^{-a}$ (9)

Tomando logaritmo decimal en ambos lados de la Ecuación 8, se obtiene,

$\log R_F = \log E - a \log i + a\ \alpha\ L\ C$ (10)

Protocolo de Medición

1) Mida la corriente (i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5) que circula por el emisor de luz para las 5 (cinco) posiciones de la llave de la fuente de corriente. Cada posición de la llave corresponde a un valor de corriente distinto.
   Nota: Recuerde que para medir la corriente se debe conectar el multímetro en serie entre el emisor y la fuente (Ver Figura 3).

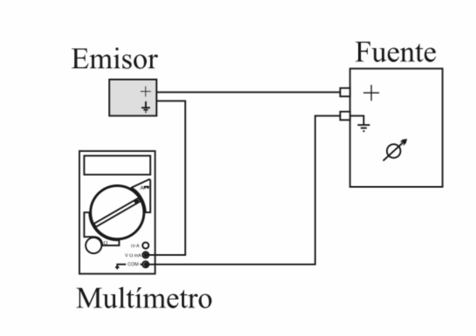


Figura3: Configuración para medir corriente

2) Mida la resistencia (R) del detector cuando se utiliza la mezcla de concentración desconocida (C_d) para los 5 (cinco) valores de corriente que entrega la fuente de corriente.
   Observación: Antes de utilizar la mezcla, revuélvala bien asegurándose que la misma sea homogénea.
   Nota 1: Asegúrese que tanto el emisor como el detector de luz estén por debajo de la superficie de la mezcla.
   Nota 2: Asegúrese de haber realizado la conexión del cable entre los conectores de la fuente de corriente. Ver Figura 2.
3) Realice al menos 4 (cuatro) mezclas de concentraciones distintas en el rango comprendido entre 2 (dos) y 5 (cinco) gotas de tinta en *100 ml* de agua. Mida para cada mezcla la resistencia (R) del detector para todos los 5 (cinco) valores de corriente de la fuente de corriente.
4) Repita el punto 1 y designe a los valores obtenidos por i_1', i_2', i_3', i_4' e i_5'.
5) Mida el valor de la resistencia (R_0) que está conectada en paralelo con la fotorresistencia en el detector.
   Nota: Para ello desconecte la fotorresistencia de la resistencia R_0.
6) Determine la validez de la siguiente afirmación,
   Si $R_0 >> R$ entonces $R_F \approx R$.
7) Mida la distancia (L) recorrida por el haz de luz a través de la mezcla.

Sugerencia: En lo posible no cambie la escala del multímetro cuando realice las mediciones de corriente ni cuando realice las mediciones de resistencia.

Registro y Análisis de los Datos

1) Con los datos medidos de corriente (*i* e *i'*), concentraciones (*C*) y resistencias (*R*) con sus respectivos errores, confeccione una tabla como la **Tabla I**.
Nota: No utilice la tabla ejemplo para registrar los valores medidos por usted.

Tabla I

			C_d	C_1	C_2	C_3	C_4
Pos. Llave	i(A)	i'(A)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)
1							
2							
3							
4							
5							

2) Para un valor fijo de corriente utilizado, confeccione una tabla, como la **Tabla II**, con los valores de concentración *C* de tinta y de los valores de *log(R)* con sus respectivos errores. Indique el valor de corriente *i* elegido con su error.
Nota: No utilice la tabla ejemplo para registrar los valores medidos por usted.

Tabla II

	C	log(R(Ω))
C_d		
C_1		
C_2		
C_3		
C_4		

3) A partir de la **Tabla II**, confeccione un gráfico de los valores de *log(R)* en función de la concentración *C* de tinta.
4) A partir del gráfico confeccionado en el punto anterior, determine el valor de la concentración desconocida (C_d) con su error.

Parte 3: Determinar del coeficiente de absorción α de la tinta.

1) Utilizando el gráfico confeccionado, determine la recta que mejor ajusta los puntos de *log(R)* en función de *C* y determine la pendiente de la misma.

La ecuación de una recta es:

$$y = b_1 + m_1\, x \qquad (11)$$

Si $y = log(R)$ y $x = C$ entonces, la ecuación de la recta utilizada en el ajuste es:

$$\log R = b_1 + m_1\, C \qquad (12)$$

De la Ecuación (10), y usando la aproximación $R_F \approx R$, se obtiene:

$$b_1 = \log E - a\, \log i \qquad (13)$$

$$m_1 = a\, \alpha\, L \qquad (14)$$

2) Para un valor de concentración C fijo, confeccione una tabla, como la **Tabla III**, de los valores de *log(i)* y de *log(R)* con sus respectivos errores. Indique el valor de concentración C elegido con su error.
Nota: No utilice la tabla ejemplo para registrar los valores medidos por usted.

Tabla III

Pos. Llave	*log(i(A))*	*log(R(Ω))*
1		
2		
3		
4		
5		

3) A partir de la **Tabla III**, confeccione un gráfico de los valores de *log(R)* en función de los valores de *log(i)*. Determine la recta que mejor ajusta los puntos graficados y el valor de la pendiente.

La ecuación de una recta es:

$$y = b_2 + m_2\, x \qquad (15)$$

Si y =\log(R) y x =\log(i) entonces, la ecuación de la recta utilizada en el ajuste es:

$$\log R = b_2 + m_2 \log i \qquad (16)$$

De la Ecuación (10), y usando la aproximación $R_F \approx R$, se obtiene:

$$b_2 = \log E - a\, \alpha\, L\, C \qquad (17)$$

$$m_2 = -a \qquad (18)$$

4) A partir de los valores de las pendientes (m_1 y m_2) y del valor medido de L, determine el valor del coeficiente de absorción α de la tinta con su error.

Parte 4: Parametrización del dispositivo experimental.
A partir de los gráficos y ajustes realizados, escriba una relación para la resistencia (R), medida en el detector, en función de la corriente (i) entregada por la fuente y de la concentración (C) de tinta para el dispositivo experimental utilizado y determine los valores de las constantes con sus errores respectivos.
Nota: De la Ecuación (8) y usando la aproximación $R_F \approx R$, la relación de R con i y C es la siguiente,

$$R = \Lambda\, i^{-a}\, 10^{\kappa C} \qquad (19)$$

Donde Λ, a y κ son constantes.

Solución

Parte 1: Determinar el volumen de una gota de tinta.

Cuento distintos números de gotas de tinta (*N*) y mido el volumen V_N correspondiente en la probeta. El volumen de una gota está dado por $V_g = \frac{V_N}{N}$.

Mediciones

Número de gotas	V_N *(ml)*	*Vg (ml)*
70	3,0 ± 0,2	0,043 ± 0,003
100	4,2 ± 0,2	0,042 ± 0,002
130	5,2 ± 0,2	0,040 ± 0,002

Se tomó como error de V_N a la apreciación de la probeta utilizada en la medición.
El error de V_g mostrado en la Tabla I se calculó mediante:

$$\Delta V_g = \frac{\Delta V_N}{V_N} \qquad (20)$$

El valor de V_g se determinó promediando los valores de la tabla y se tomo como error al máximo error obtenido.

$$\boxed{V_g = (0{,}042 \pm 0{,}003)\ ml}$$

Parte 2: Determinar la concentración *C* de una mezcla de tinta y agua.

Concentraciones utilizadas en las mediciones:
C_1: 2 (dos) gotas de tinta en *100 ml* de agua.
C_2: 3 (tres) gotas de tinta en *100 ml* de agua.
C_3: 4 (cuatro) gotas de tinta en *100 ml* de agua.
C_4: 5 (cinco) gotas de tinta en *100 ml* de agua.

Los valores de concentraciones utilizados y sus errores, que se muestra en la Tabla I, se calcularon mediante:

$$C_i = \frac{V_g \ \#gotas}{V} \qquad (21)$$

$$\Delta C_i = C_i\left(\frac{\Delta V_g}{V_g} + \frac{\Delta V}{V}\right) \qquad (22)$$

Donde el subíndice *i* indica las distintas concentraciones, # *gotas* es el número de gotas de tinta utilizado en cada mezcla, V_g el volumen de una gota de tinta expresado en *mililitros* y *V* el volumen de agua utilizado también expresado en *mililitros*.

					C_d		$C_1 = (8,4 \pm 0,8)x10^{-4}$		$C_2 = (12 \pm 1)x10^{-4}$		$C_3 = (17 \pm 2)x10^{-4}$		$C_4 = (21 \pm 2)x10^{-4}$	
Pos. Llave	i x 10^{-3} (A)		i' x 10^{-3} (A)		R x 10^{3} (Ω)		R x 10^{3} (Ω)		R x 10^{3} (Ω)		R x 10^{3} (Ω)		R x 10^{3} (Ω)	
1	24,0	(24,0 ± 0,1)	24,0	(24,0 ± 0,1)	103,4	(103,0 ± 0,5)	53,3	(53,2 ± 0,1)	83,5	(83,3 ± 0,2)	121,9	(122,2 ± 0,3)	169,8	(168 ± 2)
	23,9		23,9		402,8		53,1		83,1		122,5		168,8	
2	18,3	(18,3 ± 0,1)	18,3	(18,3 ± 0,1)	109,5	(109,5 ± 0,1)	56,1	(56,2 ± 0,1)	88,4	(88,4 ± 0,1)	128,8	(129,2 ± 0,4)	180,9	(178 ± 3)
	18,3		18,3		109,4		56,3		88,3		129,6		177,0	
3	13,6	(13,6 ± 0,1)	13,6	(13,6 ± 0,1)	118,7	(118,5 ± 0,2)	60,4	(60,5 ± 0,2)	95,2	(95,5 ± 0,3)	140,2	(140,5 ± 0,3)	197,0	(195 ± 2)
	13,6		13,6		118,3		60,7		95,8		140,8		193,5	
4	11,6	(11,6 ± 0,1)	11,6	(11,6 ± 0,1)	124,6	(124,6 ± 0,1)	63,5	(63,6 ± 0,1)	100,6	(100,7 ± 0,2)	147,5	(147,9 ± 0,5)	204	(205 ± 2)
	11,6		11,6		124,6		63,7		100,9		148,4		206	
5	9,7	(9,7 ± 0,1)	9,7	(9,7 ± 0,1)	132,6	(132,8 ± 0,3)	67,5	(67,6 ± 0,1)	107,3	(107,5 ± 0,3)	157,5	(157,9 ± 0,5)	219	(221 ± 2)
	9,7		9,7		133,1		67,7		107,8		158,4		223	

Tabla I

Se midió los valores de i e i' dos veces.
Se cuido que la solución cubriera al emisor y al detector.
Los valores de R se midieron dos veces y se determino el error utilizando la diferencia entre los valores medidos.
Al terminar cada medición, se recupero la solución y se le agrego gotas de tinta luego de verificar el aforo.

<u>Nota:</u> Los valores medidos de R dependen de la fotorresistencia por lo tanto pueden variar bastante si se utiliza otra. Lo que se debe cumplir es la tendencia observada en la tabla I, a menor corriente (menor intensidad de luz) mayor valor de R y a mayor valor de C mayor valor de R.

$$\boxed{R_0 = (1467 \pm 2)\ k\Omega}$$

$$\boxed{L = (60 \pm 1)\ mm}$$

Validez de la aproximación si $R_0 >> R$ entonces $R_F \approx R$.
El valor de resistencia más grande medido fue de *220 kΩ* que corresponde a la concentración C_5 y a la posición de la llave 5.
Como R_0 y R_F están conectadas en paralelo, el valor de R está dado por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_0} \qquad (23)$$

Entonces, el valor de R_F está dado por:

$$R_F = \frac{R_0\, R}{R_0 - R} \qquad (24)$$

Utilizando la Ecuación (24), el valor de R_F para $R = 220\ k\Omega$ es aproximadamente *260 kΩ*. Entonces el error que introduce la aproximación es, como máximo, del 15 %.

Tabla II

	$C \times 10^{-4}$	$i_1 = (24{,}0 \pm 0{,}1)$ mA
C_d	X	log(R(Ω))
C_1	*(8,4 ± 0,8)*	(5,013 ± 0,004)
C_2	*(12 ± 1)*	(4,726 ± 0,002)
C_3	*(17 ± 2)*	(4,921 ± 0,002)
C_4	*(21 ± 2)*	(5,23 ± 0,01)

Para calcular el error de *log(R)* utilizo la diferencia en los valores extremos, ie:

$$\Delta \log R = |\log(R + \Delta R) + \log(R - \Delta R)|$$

Del gráfico mostrado en la Figura 4 se determinó el valor de la concentración incógnita:

$$\boxed{C_d = (15 \pm 1) \times 10^{-4}}$$

Parte 3: Determinar del coeficiente de absorción α de la tinta.
La pendiente de la recta que mejor ajusta los datos graficados en la Figura 4 es:

$$\boxed{m_1 = (41 \pm 4) \times 10}$$

Tabla III

		$C_4 = (21 \pm 2)x10^{-4}$
Pos. Llave	log(i(A))	log(R(Ω))
1	*(-1,620 ± 0,003)*	*(5,23 ± 0,01)*
2	*(-1,738 ± 0,005)*	*(5,25 ± 0,01)*
3	*(-1,867 ± 0,006)*	*(5,290 ± 0,009)*
4	*(-1,936 ± 0,007)*	*(5,312 ± 0,009)*
5	*(-2,013 ± 0,009)*	*(5,344 ± 0,008)*

Los errores de *log(R)* y de *log(i)* se calcularon de la misma manera que para la Tabla II.
La pendiente de la recta que mejor ajusta los datos graficados en la Figura 5 es:

$$\boxed{m_2 = (-0{,}30 \pm 0{,}02)}$$

El valor de α y su error se calculan a partir de:

$$\alpha = \frac{m_1}{-m_2 L} \qquad (25)$$

$$\Delta\alpha = \alpha\left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta m_2}{m_2}\right) \qquad (26)$$

$$\boxed{\alpha = (23 \pm 4)\ \mathrm{mm}^{-1}}$$

Parte 4: Parametrización del dispositivo experimental.

La constante a es igual a $-m_2$, la constante κ es igual a m_1 y la constante Λ es la constante E expresada en el teórico.

$$\boxed{a = (0{,}30 \pm 0{,}02)}$$

$$\boxed{\kappa = (41 \pm 4) \times 10}$$

De la expresión teórica $R = \Lambda\ i^{-a}\ 10^{\kappa C}$ se despeja Λ:

$$\Lambda = R\, i^{a}\, 10^{-\kappa C} \qquad (27)$$

Utilizando los valores medidos de la Tabla I se determina el valor de Λ. Para determinar el error se utiliza los valores extremos.

$$\boxed{\Lambda = (8 \pm 4) \times 10^3\ \Omega}$$

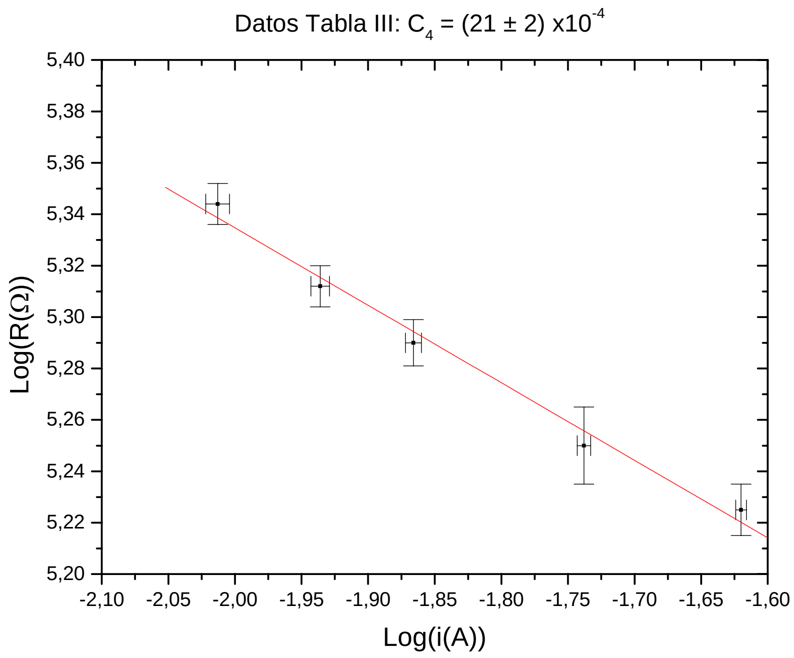


Figura 4: Gráfico del *log(R)* en función de *C*.

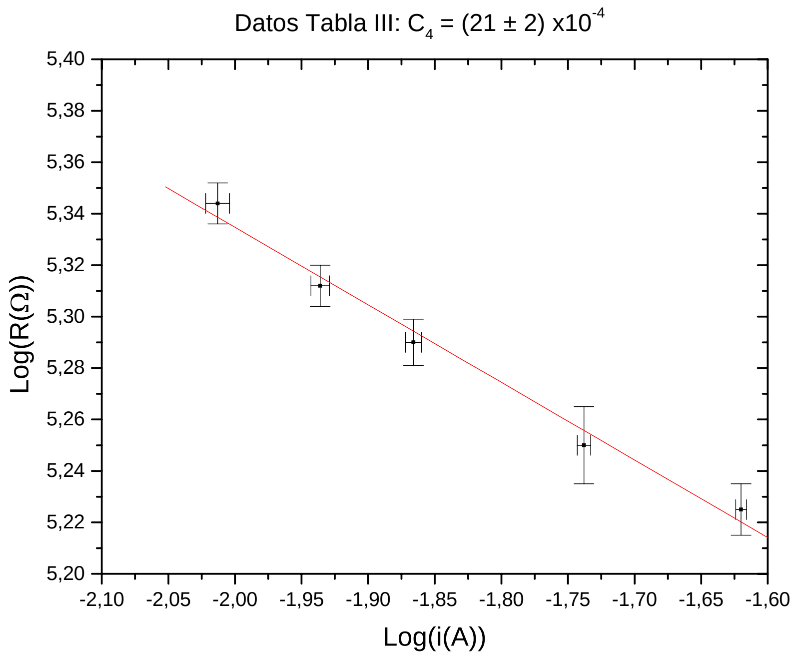


Figura 5: Gráfico del *log(R)* en función del *log(i)*.

Olimpíada Argentina de Física 2009

Instancia Nacional

Prueba Teórica
22 de Octubre de 2009

- Antes de empezar a resolver la prueba lea cuidadosamente TODO el enunciado de la misma.
- **NO escriba su nombre en ningún sitio de la prueba**.
- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. Ejemplo: PT1 2/5 (Problema teórico 1, hoja dos de cinco).
- Recuerde que no puede utilizar ningún elemento que no esté incluido en la prueba, aparte de los útiles de escritura y de geometría.
- Si necesita más hojas pídalas al Bedel. **No use hojas personales**.
- No escriba respuestas en las hojas del enunciado pues no serán consideradas.
- Entregue la prueba en el sobre de papel provisto.
- **Escriba su nombre claramente únicamente en esta carátula, en ningún otro lugar.**

Nombre y Apellido:

Problema 1: Señal luminosa en isla desierta.

Usted se encuentra en una isla desierta y luego de recorrerla encuentra una lámpara, cuatro cajas conteniendo cada una 12 pilas y algunos cables. La lámpara es de 100 W con resistencia de 9 Ω y las pilas son de 6 V con resistencia interna de 3 Ω.

Con estos elementos decide armar un circuito para enviar señales luminosas cuando pase un avión o un barco cerca de la isla. Con el objeto de ser observado desde lo más lejos posible se debe lograr la mayor iluminación de la lámpara y para esto es necesario hacer circular la máxima corriente a través de la misma.

Con este objetivo Ud. arma un circuito de manera de tener *M* ramas en paralelo y en cada una de ellas *N* pilas en serie, de manera tal de ***utilizar todas las pilas encontradas (M*N=48).***

a) Encuentre una expresión para la corriente que circula a través de la lámpara en términos de N y M

b) Encuentre los valores de *M* y *N* correspondientes al circuito con el cuál se logra hacer circular la máxima corriente a través de la lámpara.

c) Encuentre los valores de *M* y *N* con los cuales se logra la mayor iluminación sin quemar la lámpara

d) Sabiendo que la eficiencia lumínica de la lámpara es de 6 lum/W, y que la sensibilidad de los bastones del ojo humano es de 10^{-6} lum/m^2 calcule la máxima distancia a la cual podrán ser observadas las señales.

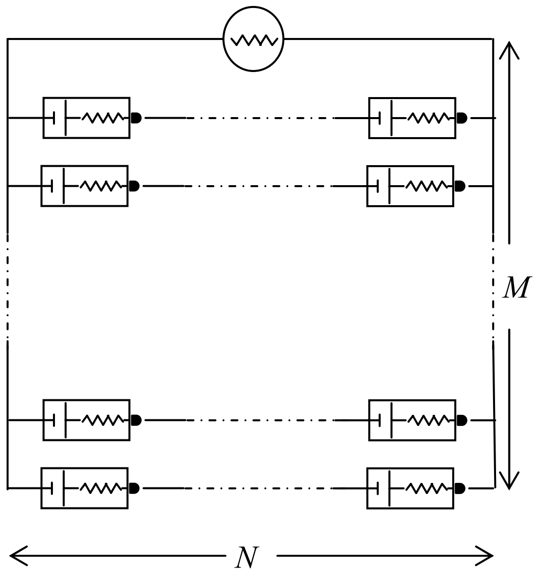
Nota: *Para los puntos a, b y c considere que la resistencia no cambia con la temperatura.*

Ayuda: *La expresión (ax+b/x), con x >0, toma un valor mínimo para* $x^2 = b/a$

Solución

a) Total = 4 puntos.

Un esquema del circuito se muestra en la figura de abajo



Si denominamos i_r a la corriente que pasa por cada una de las ramas tenemos que la diferencia de potencial entre los bornes de una pila es

$$\Delta V_P = V_P - i_r \,.\, R_P$$

y como en una rama tenemos N pilas la diferencia de potencial en los extremos de cada rama será:

$$\Delta V_r = N \,.\, \Delta V_P = N.(V_P - i_r \,.\, R_P) \qquad \text{(1 punto)}$$

Por la lámpara pasará una corriente igual a la suma de la corriente que pasa por todas las ramas que contienen pilas entonces $I = M \,.\, i_r$ entonces la diferencia de potencial en la rama que contiene la lámpara será:

$$\Delta V = I \,.\, R_L = M \,.\, i_r \,.\, R_L \qquad \text{(1 punto)}$$

Cómo la diferencia de potencial en todas las ramas debe ser la misma tenemos que:

$$N \,.\, (V_P - i_r \,.\, R_P) = M \,.\, i_r \,.\, R_L$$

Despejando se obtiene

$$i_r = \frac{N.V_P}{M.R_L + N.R_P} \qquad \text{(1 punto)}$$

Por lo tanto la corriente que circula por la lámpara es

$$I = M.i_r = \frac{M.N.V_P}{M.R_L + N.R_P} \qquad \text{(1 punto)}$$

Como en nuestro caso *M.N =48* podemos reescribir esta ecuación en término sólo de la cantidad de pilas que hay en una rama

$$I = \frac{48.V_P}{\frac{48}{N}.R_L + N.R_P}$$

b) Total = 2 puntos.

La máxima corriente que circulará por la lámpara corresponderá a aquella para la cual el denominador en la expresión anterior toma su mínimo valor. Haciendo uso de la ayuda podemos identificar $a = R_P$ y $b = 48\ R_L$ ($R_P = 3\ \Omega$ y $R_L = 9\ \Omega$) podemos determinar

$$N^2 = \frac{48.R_L}{R_P} = 144$$

$$N = 12$$

Es decir que pasará la máxima corriente por la lámpara cuando armemos un circuito con 4 ramas con 12 pilas en cada una de ellas.

Otra posibilidad es evaluar la expresión de la corriente total para todas las combinaciones posibles de *M* y *N*.

N	*M*	*I* [A]
1	48	0.662
2	24	1.297
3	16	1.882
4	12	2.400
6	8	3.200
8	6	3.692
12	4	4.000
16	3	3.840
24	2	3.200
48	1	1.882

De donde resulta evidente que la máxima corriente se logra con un circuito que contiene 4 ramas con 12 pilas en cada una de ellas.

c) Total = 2 puntos.

Cómo la lámpara es de 100 W con una resistencia interna de 9 Ω la máxima corriente que puede pasar por ella es:

$$P = I_m^2 * R$$

$$I_m = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{11.\widehat{1}}\ A = 3.\widehat{3}\ A \qquad \text{(1 punto)}$$

Por lo tanto, analizando la tabla anterior, la máxima corriente que se puede hacer pasar por la lámpara sin quemarla es 3.2 A.

Existen dos circuitos posibles para lograr esta corriente, uno de 8 ramas con 6 pilas en cada una de ellas ($N = 6$ y $M = 8$) ó uno de 2 ramas con 24 pilas en cada una de ellas ($N= 24$ y $M = 2$).

Si dan 1 solo circuito 0.5 puntos
Si da los dos circuitos posibles 1 punto

d) Total = 2 puntos.

Con esta corriente máxima de 3.2 A la potencia disipada por la lámpara es

$$P = I_m^2 * R = (3.2A)^2 .\, 9\ \Omega = 92.16\, W \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

la potencia lumínica de la lámpara será

$$P_L = 92.16\, W \,.\, 6\, \frac{lum}{W} = 552.96\, lum \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Cómo esa potencia lumínica se distribuye en todas las direcciones en una semiesfera tenemos que a una distancia L la densidad de potencia lumínica será

$$\delta_{PL} = \frac{P_L}{2.\pi.L^2}$$

y la luz de la lámpara podrá ser observada en todo lugar en el cual esta densidad de potencia lumínica sea superior a la sensibilidad del ojo (10^{-6} lum/m^2), entonces

$$\delta_{PL} = \frac{P_L}{2.\pi.L^2} \geq 10^{-6}\ \frac{lum}{m^2} \qquad \text{(0.75 puntos)}$$

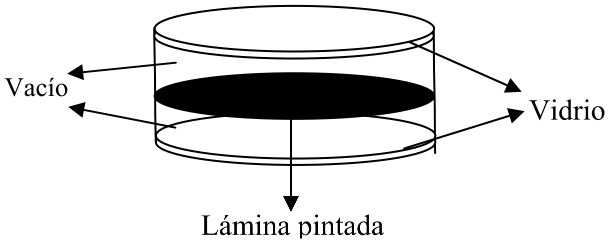
$$L \leq \sqrt{\frac{P_L}{2.\pi.10^{-6}\ lum/m^2}} = 9381.2\ m \qquad \text{(0.25 puntos)}$$

También puede considerarse bien si el alumno toma la potencia lumínica dispersada en la esfera total ($S = 4.\pi.L^2$), entonces la distancia será $L \leq 6633.5\ m$.

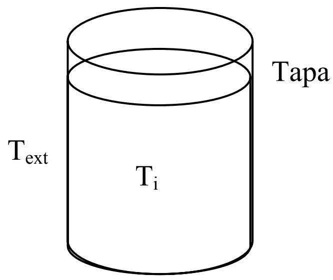
Problema 2: Horno por radiación.

Un sistema para calentar agua de piletas de natación aprovechando la radiación solar consiste de una cañería pintada de negro, por cuyo interior circula agua. Externamente los caños están rodeados de un espacio al vacío delimitado por un tubo de acrílico de baja conductividad térmica, evitando de esta manera los efectos de convección y conducción del calor con el exterior. Aprovechando esta idea, un inventor decide fabricar un horno que le permita calentar agua aprovechando la radiación solar. De esta manera diseña la tapa del horno con las características mostradas en la Figura

La lámina intermedia está pintada de plateado de un lado y de negro del otro, lo que permite reflejar o absorber la radiación que incide sobre ella regulando



Tapa



Horno

la temperatura del interior del horno. Esta tapa puede ser colocada con el lado negro o el plateado hacia fuera.

En un ambiente a temperatura de 20 ºC, se encuentra experimentalmente que cuando el sistema alcanza el estado estacionario (es decir todas las temperaturas se mantienen constantes) la temperatura en el interior del horno es de 80 ºC.

En estas condiciones y suponiendo que:

- La tapa tiene un área de 1/2 m^2
- La radiación solar promedio por unidad de área es $P_s = 1000\ W/m^2$
- La reflectividad del lado plateado es del 90% y del lado negro del 10%.

a) Encontrar una expresión para la potencia absorbida por la lámina en términos de los coeficientes de reflectividad interior (r) y exterior (R)

b) Encontrar una expresión para la potencia irradiada por la lámina en función de r, R y su temperatura (T_L).

c) Encontrar una expresión para la temperatura que adquiere la lámina.

d) ¿En que caso (con la cara plateada hacia fuera o hacia adentro) la temperatura que adquiere la lámina es mayor? Justifique.

e) ¿En que caso la potencia irradiada por la lámina hacia el interior del horno es mayor? Justifique.

f) Calcule la potencia perdida por las paredes del horno en ambos casos.

AYUDA: *Se sabe que la energía emitida por unidad de tiempo y por unidad de área por un objeto a temperatura T está dada por la ley de Stefan-Boltzmann*

$$E = e.\sigma.T_e^4 \qquad \sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \frac{W}{m^2.K^4}$$

donde σ es una constante universal y e es la emisividad. Un cuerpo en equilibrio con sus alrededores emite y absorbe la misma cantidad de energía en la unidad de tiempo, manteniendo su temperatura constante. Para un absorbedor ideal e = 1.

Los coeficiente de absorción A y de reflectividad R satisfacen A + R =1

La emisividad e es igual al coeficiente de absorción A.

Solución

a) Total = 2 puntos.

Si denominamos R a la reflectividad de la superficie expuesta hacia el exterior del horno y r a la reflectividad de la superficie que queda hacia el interior del horno, resulta:

- Potencia absorbida de la radiación solar

$$P_{AS} = (1-R).S.P_s \qquad \text{(1 puntos)}$$

- Potencia absorbida del ambiente exterior

$$P_{Aext} = (1-R).S.\sigma.T_{ext}^4 \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

- Potencia absorbida del interior del horno

$$P_{A\,\text{int}} = (1-r).S.\sigma.T_{\text{int}}^4 \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Por lo tanto la potencia total absorbida por la lámina es

$$P_A = (1-R).S.P_s + (1-R).S.\sigma.T_{ext}^4 + (1-r).S\sigma.T_{\text{int}}^4$$

b) Total = 2 puntos.

- Potencia irradiada al ambiente exterior por la lámina

$$P_{Iext} = (1-R).S.\sigma.T_t^4 \qquad \text{(1 punto)}$$

- Potencia irradiada al interior del horno por la lámina

$$P_{I\,\text{int}} = (1-r).S.\sigma.T_t^4 \qquad \text{(1 punto)}$$

Por lo tanto la potencia total irradiada por la lámina es

$$P_I = (2-R-r).S.\sigma.T_t^4$$

c) Total = 2 puntos.

En el estado estacionario, cuando ya todas las temperas se mantienen constantes, la potencia absorbida por la lámina es igual a la potencia irradiada por la misma.

$$P_A = P_I$$

(1 punto)

$$(1-R).S.P_s + (1-R).S.\sigma.T_{ext}^4 + (1-r).S.\sigma.T_{\text{int}}^4 = (2-R-r).S.\sigma.T_t^4$$

$$T_t = \sqrt[4]{\frac{(1-R).P_s/\sigma + (1-R).T_{ext}^4 + (1-r).T_{\text{int}}^4}{(2-R-r)}} \qquad \text{(1 punto)}$$

d) Total = 1.5 puntos.

En la situación en que el lado negro de la lámina está hacia fuera $R = 0.1$ y $r = 0.9$ resultando:

$T_t = 393.91\ K = 120.75\ ºC$ (0.75 puntos)

Cuando el lado plateado de la lámina está hacia fuera $R = 0.91$ y $r = 0.1$ resultando:

$T_t = 358.42\ K = 85.26\ ºC$ (0.75 puntos)

Por lo tanto la temperatura de la lámina será mayor cuando el lado plateado de la misma esté hacia dentro.

e) Total = 1.5 puntos.

La potencia irradiada por la lámina hacia el interior del horno es:

$$P_{I\,\text{int}} = (1-r).S.\sigma.T_t^4$$

- Cuando el lado negro está hacia fuera $r = 0.9$ resultando:

$P_{I\,int} = 68.26\ W$ (0.75 puntos)

- Cuando el lado plateado está hacia fuera $r = 0.1$ resultando:

$P_{I\,int} = 421.08\ W$ (0.75 puntos)

f) Total = 1 puntos.

Cómo es sistema está en estado estacionario (todas las temperaturas de mantienen constantes) la potencia perdida por las paredes del horno será igual a la potencia que le entrega la lámina de la tapa, por lo tanto

- Cuando el lado negro está hacia fuera:

$P_{perd} = 68.26\ W$ (0.5 puntos)

- Cuando el lado plateado está hacia fuera:

$P_{perd} = 421.08\ W$ (0.5 puntos)

Problema 3: Una sorpresa extraterrestre.

Una civilización proveniente de algún sistema planetario lejano, pone en órbita alrededor de la Luna un objeto en forma de prisma. Tan pronto como los humanos se enteran de su presencia, los científicos de la Tierra comienzan a estudiar las propiedades de ese extraño objeto. Las observaciones que realizaron indican que el objeto en su movimiento orbital, permanece siempre en el plano de la órbita Tierra – Luna, que realiza una órbita circular alrededor de la Luna, que la extensión de la bisectriz del prisma pasa en todo momento por el centro de la Luna (ver figura 1) y que su período de revolución es de 2 horas y 40 minutos. A partir de esta información,

a) calcule la distancia Luna – prisma.

<u>Nota 1:</u> Suponga que el efecto gravitatorio de la Tierra sobre el objeto es despreciable y que para describir su movimiento alrededor de la Luna lo pensamos como un cuerpo puntual.

Para estudiar tanto las características geométricas como el material con el que se ha construido el prisma, los científicos planifican el siguiente experimento: cuando el objeto se encuentra en la posición indicada en la figura 2 (dibujo no a escala), se envían desde la Tierra dos poderosos rayos laser, paralelos al eje que pasa por el centro de la Tierra, el centro de la Luna y por el vértice del prisma. Esos rayos, al tocar la superficie del prisma, sufren tanto una reflexión como una refracción. Los rayos reflejados son captados por sensores ubicados sobre la superficie lunar que se encuentran separados entre si por una distancia d_{AB} = 200 km medida sobre la superficie lunar. A partir de este dato:

b) Calcule el ángulo de refringencia α del prisma (ver figura 3).

Por otro lado, los rayos que se refractaron en el prisma, emergen del mismo por la cara más cercana a la luna, para luego ser detectados por sensores ubicados sobre la superficie lunar y separados por una distancia d_{CD} = 100 km (ver figura 2). A partir de esta información.

c) Calcule el ángulo θ_r' con que los rayos emergen del prisma luego de la segunda refracción (ver figura 3).

d) Muestre que el índice de refracción del prisma está dado por las siguiente expresión:

$$n = \sqrt[2]{\cos^2\left(\alpha/2\right) + \left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta_r' + sen\left(\alpha/2\right)}{\cos\left(\alpha/2\right)}\right)^2}$$

e) Determine el índice de refracción *n* del prisma. Exprese el resultado con cuatro cifras significativas.

<u>Nota 2:</u> En los puntos b) y c) considere que el prisma es lo suficientemente pequeño como para suponer que todos los rayos (tanto los reflejados como los refractados) emergen de un único punto interior al prisma.

<u>Nota 3:</u> Considere que la luz se propaga a velocidad infinita.

<u>Nota 4:</u> Para todos los cálculos trabaje con seis cifras significativas.

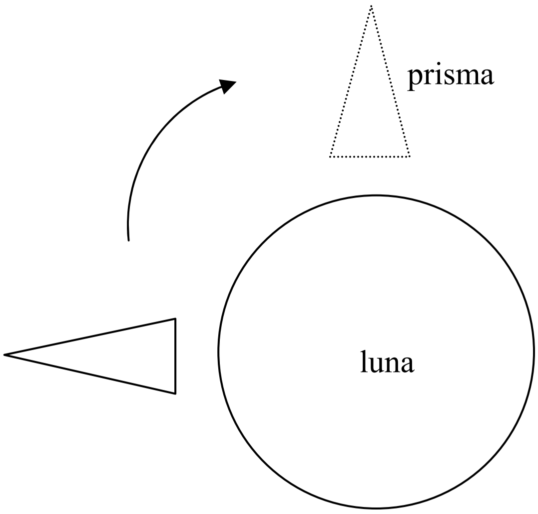


Figura 1

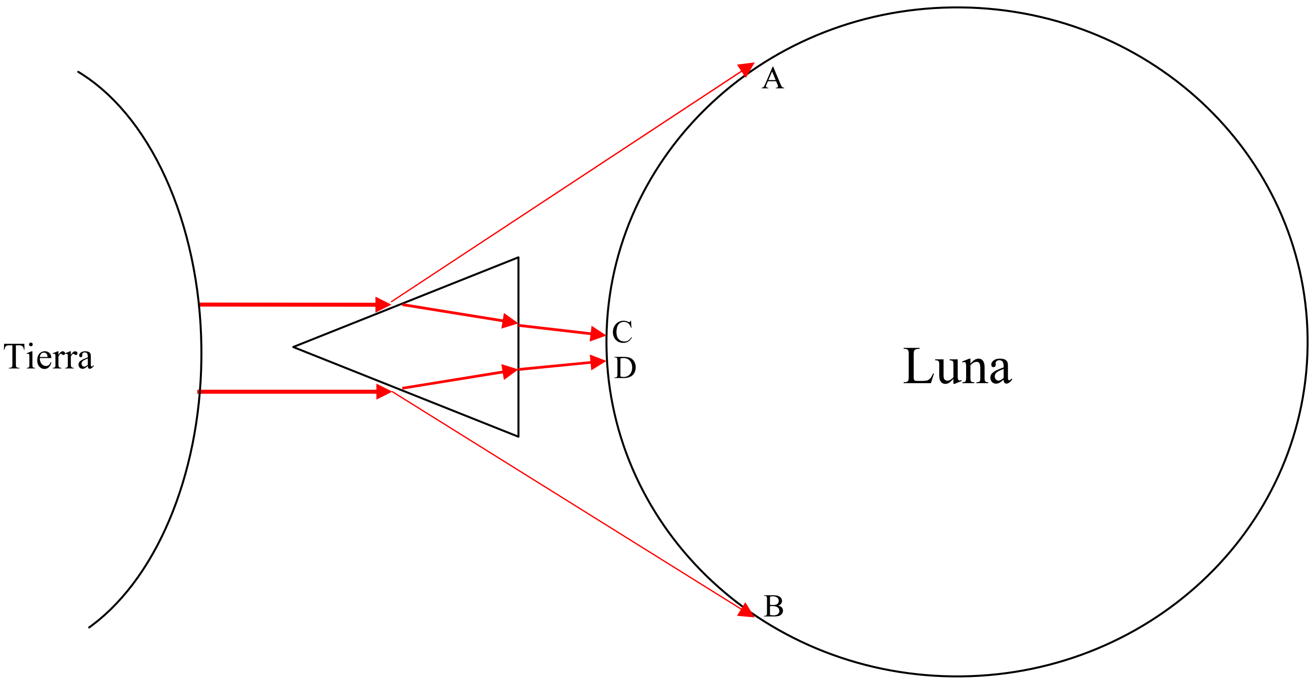


Figura 2

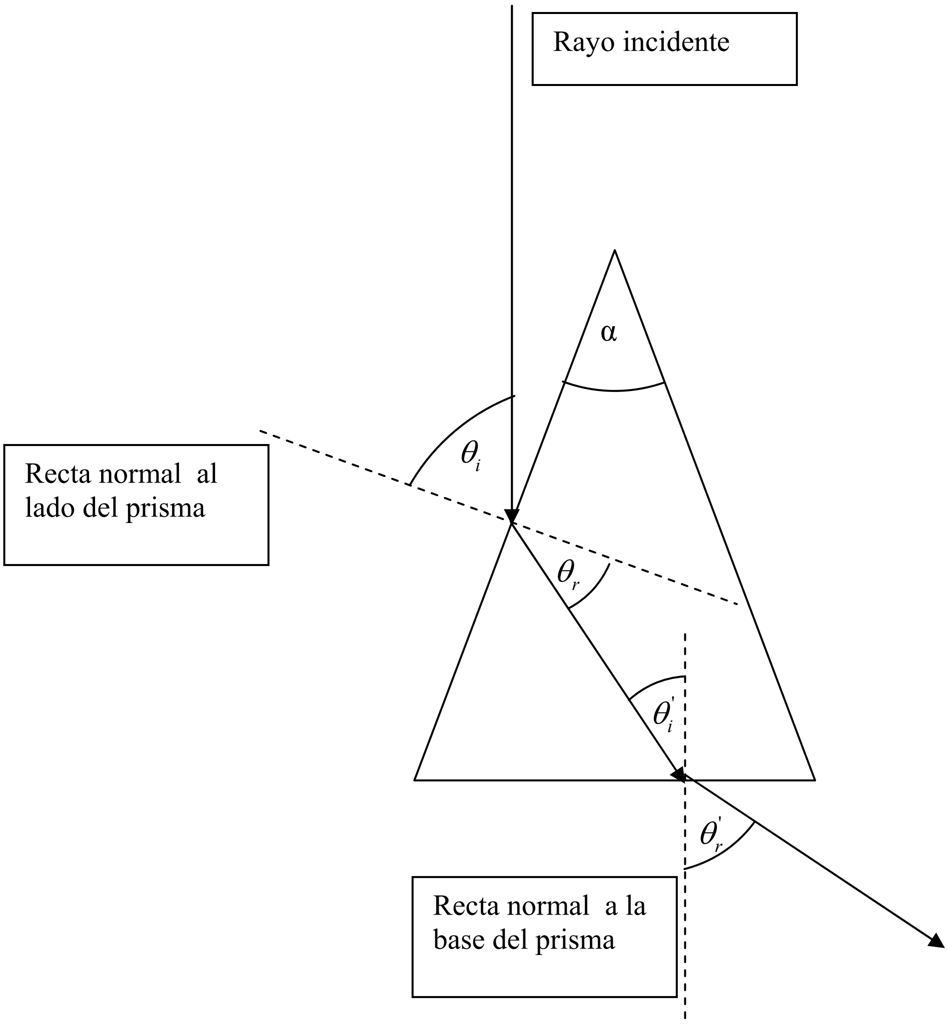


Figura 3: Diagrama no a escala de uno de los rayos que inciden en el prisma y sus respectivas refracciones. Los ángulos se han exagerado para mayor claridad en el dibujo.

Datos necesarios:

1. Radio de la Luna: 1737 km
2. Índice de refracción del vacío: 1
3. Masa de la Luna: $7{,}35 \times 10^{22}$ kg
4. Constante Universal de la Gravitación: $6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$

Fórmulas útiles:

$$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\mathrm{sen}(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$$

$$\mathrm{sen}(a/2)\cos(a/2) = (1/2)\mathrm{sen}(a)$$

Solución

a) Total = 2 puntos.

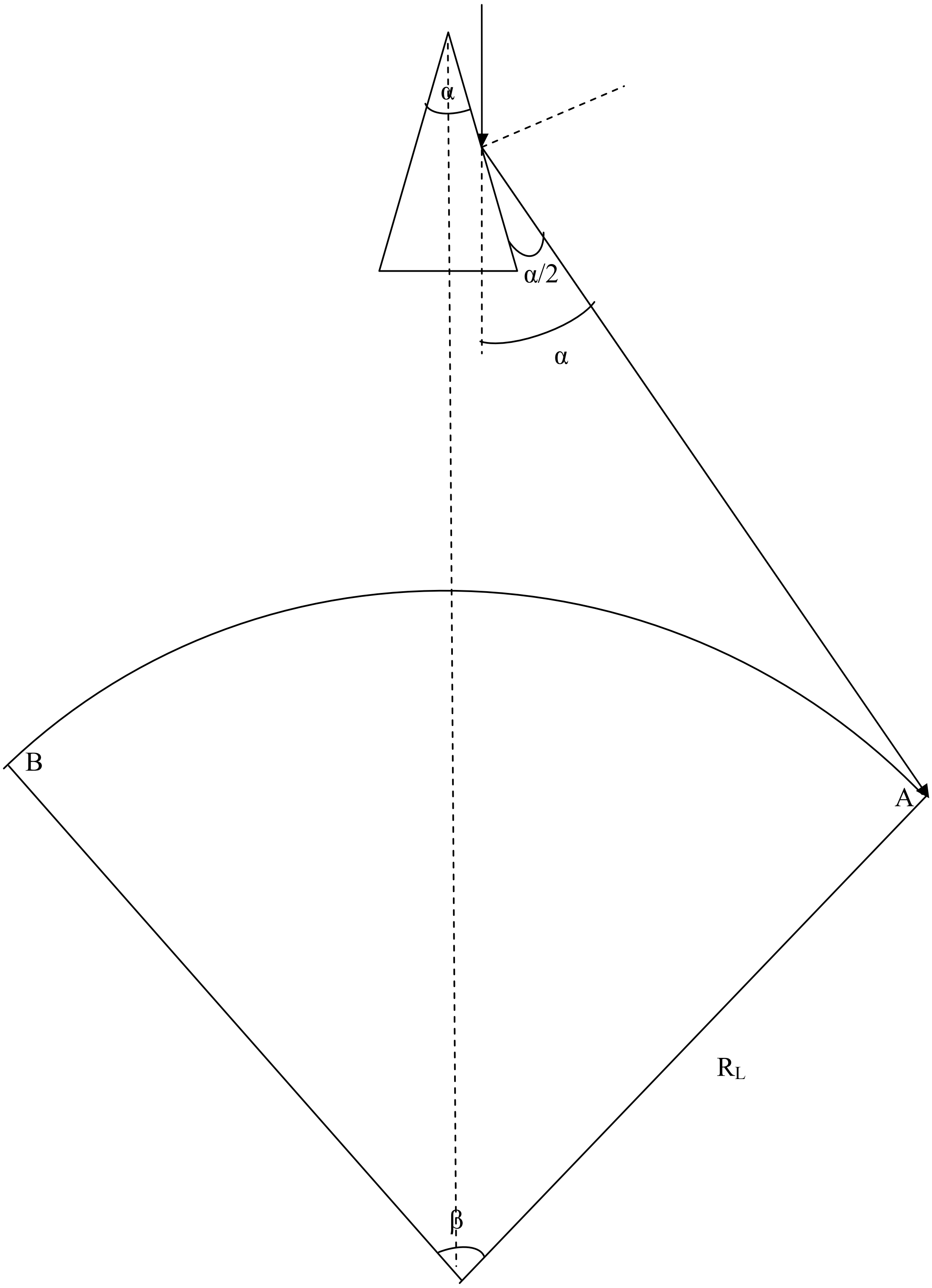
T = 2h 40` = 160` = 9600 s

$$F = -\frac{Gm_L m_p}{R^2} = -m\omega^2 R \quad 1.5 \quad \text{puntos}$$

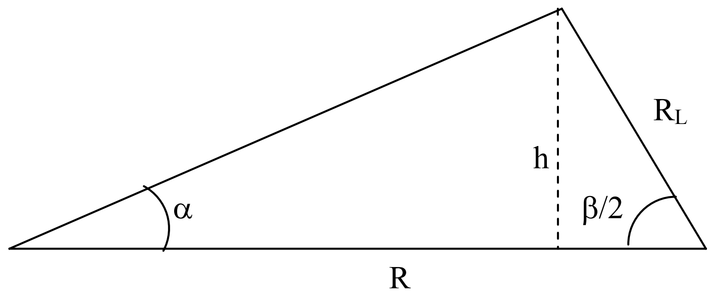
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$R^3 = \frac{Gm_L T^2}{4\pi^2} = 2253.54 km \quad 0.5 \quad \text{puntos}$$

b) Total = 2 puntos.



$$\overline{AB} = 200km$$
$$\beta R_L = 200km$$
$$\beta = 0.115141rad$$
$$\beta / 2 = 0.0575705rad$$



$$R_L \operatorname{sen}(\frac{\beta}{2}) = h$$

$$\tan(\alpha) = \left(\frac{h}{R - R_L \cos(\frac{\beta}{2})} \right) = \left(\frac{R_L \operatorname{sen}(\frac{\beta}{2})}{R - R_L \cos(\frac{\beta}{2})} \right)$$

$$\tan(\alpha) = 0.192417$$

$$\alpha = 0.190094$$

c) Total = 2 puntos.

De la misma forma que calculamos α podemos calcular θ'_r.

$$\overline{CD} = 100km$$

$$\gamma R_L = 100km$$

$$\gamma = 0.0575705rad$$

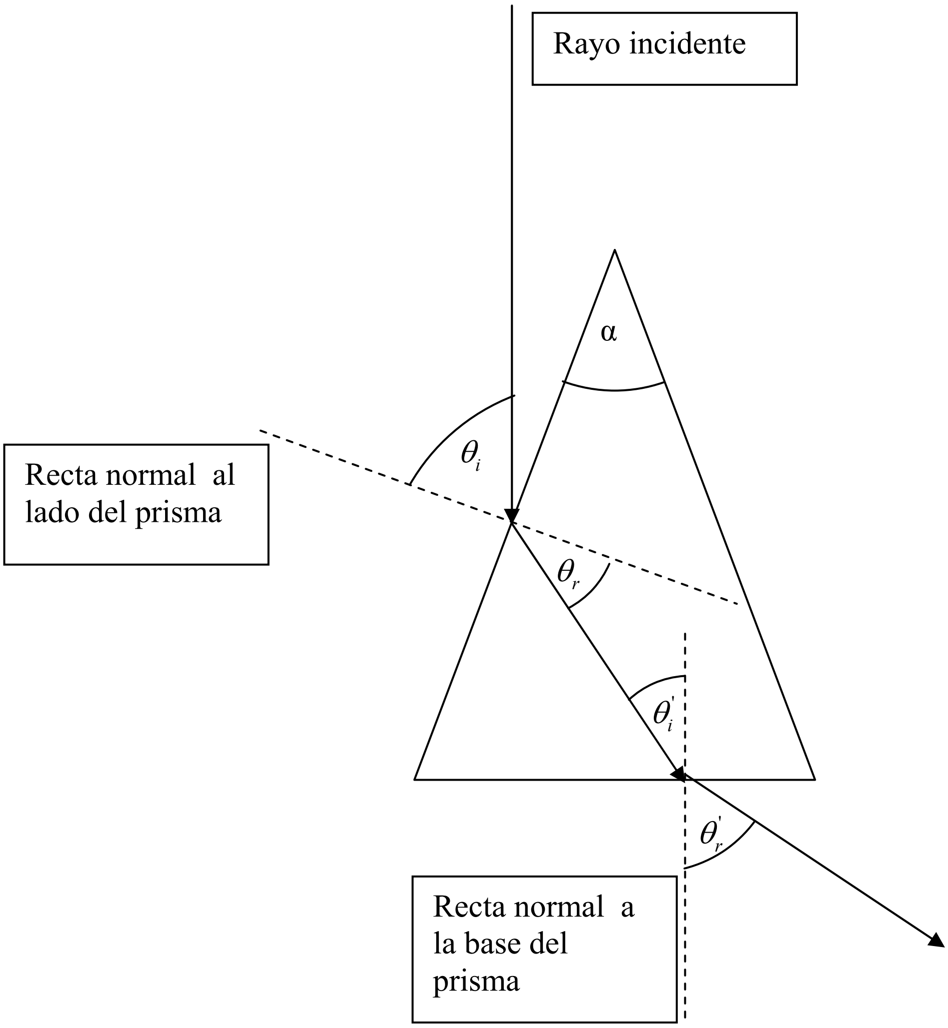
$$\gamma / 2 = 0.0287853rad$$

$$\tan(\theta_r^{'}) = \left(\frac{R_L \operatorname{sen}(\frac{\gamma}{2})}{R - R_L \cos(\frac{\gamma}{2})} \right)$$

$$\tan(\theta_r^{'}) = 0.0966501$$

$$\theta_r^{'} = 0.09635088rad$$

d) Total = 3 puntos



$$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad 0.5 \quad \text{puntos}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_i) = n\operatorname{sen}(\theta_r) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad 0.5 \quad \text{puntos}$$

$$n\operatorname{sen}(\theta_i') = \operatorname{sen}(\theta_r') \quad 0.5 \quad \text{puntos}$$

$$\theta_r + \theta_i' + \pi - \theta_i = \pi$$

$$\theta_i' = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \theta_r \quad 0.5 \quad \text{puntos}$$

$$n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \theta_r\right) = \operatorname{sen}(\theta_r')$$

$$n = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{sen(\theta_r') + sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2} \quad 1 \quad \text{punto}$$

e) $n = 1.0138$ **1 punto**