



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA

Problema N° 1

El LIGO y el año de las Ondas Gravitacionales (y su centenario).

Entre 1915 y 1916, Albert Einstein concluyó su Teoría General de la Relatividad (RG) en una serie de artículos que cambiaron el concepto newtoniano de espacio, tiempo y gravitación. La ecuación del campo gravitacional de la RG expresa que la masa y la energía modifican la geometría del espacio-tiempo. En palabras del gran físico John Wheeler:



*"La materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse.
El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse."*

Entre otras cosas, la RG predice la existencia de fenómenos tan exóticos como los agujeros negros y las ondas gravitacionales. Los agujeros negros son objetos masivos que curvan el espacio-tiempo de tal modo que ni la luz puede escapar de ellos. Las ondas gravitacionales, son oscilaciones del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz. El paso de una onda gravitacional modifica el espacio-tiempo de tal modo que la distancia L , entre dos puntos se ve modificada en una cantidad ΔL . La *deformación (strain)* h , de una onda gravitacional se define como el cociente entre ambas,

$$h = \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

En general estas ondas son extremadamente débiles, a menos que las masas y las aceleraciones involucradas sean extremadamente altas. Los candidatos a fuentes de ondas gravitacionales observables son algunos fenómenos astronómicos extraordinarios, como por ejemplo un sistema de estrellas binarias muy próximas rotando una respecto de otra. Aun así las ondas generadas son tan débiles que por mucho tiempo se dudó acerca de la posibilidad de su detección directa. Según la RG, la potencia P emitida en forma de ondas gravitacionales por un sistema binario es aproximadamente,

$$P \approx \frac{c^3}{G} (\pi h f r)^2 \quad (2)$$

donde h es la deformación a una distancia r de la fuente y f es la frecuencia de la señal detectada. $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ es la constante de gravitación universal y $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ es la velocidad de la luz.

Sin embargo, la observación directa de ondas gravitacionales era un desafío que requería logros tecnológicos excepcionales. Ronald Drever, Rainer Weiss y Kip Thorne se cuentan entre los primeros científicos en proponer la detección de ondas gravitacionales mediante interferometría, lo cual constituye la base del Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Láser: LIGO.

El proyecto cuenta actualmente con dos observatorios, **LIGO Hanford** y **LIGO Livingston**, **distanciados 3002 km**, uno de otro. Estos observatorios a menudo se comparan a gigantes “micrófonos”, pues permiten detectar las vibraciones gravitacionales del espacio-tiempo, de modo análogo a como un micrófono permite detectar las vibraciones de las ondas sonoras.

Cada observatorio está compuesto por dos brazos perpendiculares entre sí, de **4,0 km de longitud** cada uno. El efecto de una onda gravitacional es reducir las distancias en una dirección y simultáneamente aumentarlas en la dirección perpendicular. Es decir que cuando una onda gravitacional pasa a través del interferómetro, la longitud de los brazos oscila con la misma frecuencia de la onda gravitacional de tal modo que cuando un brazo se acorta el otro se estira y viceversa. Para medir la deformación producida por una onda gravitacional se utiliza un sistema constituido principalmente por un láser y varios espejos (Fig. 1). Para reducir las vibraciones producidas por el entorno, los espejos se encuentran colgando de un sofisticado sistema tipo péndulo.

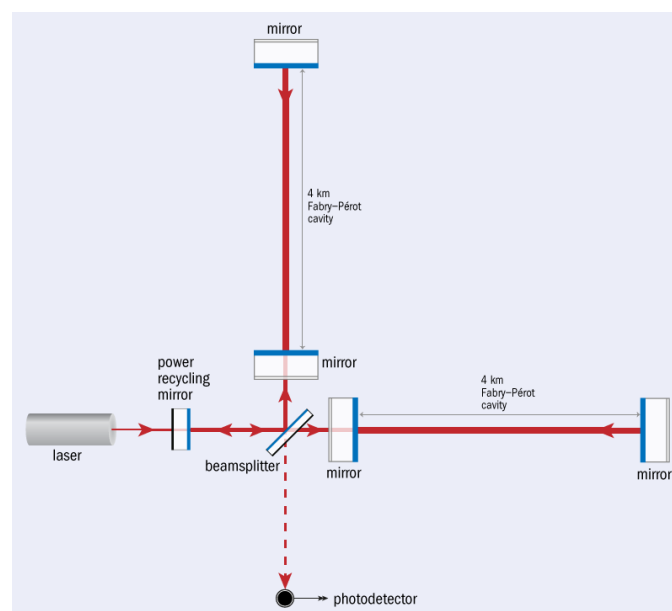


Fig. 1 - Esquema del interferómetro

Luego de una actualización (Advanced LIGO) culminada en agosto de 2015, LIGO tuvo su gran día el 14 de setiembre de 2015, cuando se observó una onda gravitacional por primera vez en la historia, justo a tiempo para “celebrar” los 100 años de la predicción teórica realizada por Einstein.

La señal detectada en uno de los observatorios se muestra en la Fig. 2. **La onda gravitacional fue detectada primero en LIGO Livingston y 6,9 ms más tarde en LIGO Hanford.**

El análisis de esta señal permitió concluir que las ondas gravitacionales observadas eran compatibles con las ondas generadas por el colapso de un sistema binario de agujeros negros con masas aproximadas, $m_A=35 M_S$ y $m_B=30 M_S$, donde $M_S=2,0 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol. A este evento se lo denominó GW150914 (Gravitational Wave 2015 September 14).

El descubrimiento fue anunciado públicamente el 11 de febrero de 2016, junto con la publicación del artículo científico correspondiente en la revista Physical Review Letters, inaugurando así la nueva era de la astronomía de ondas gravitacionales.

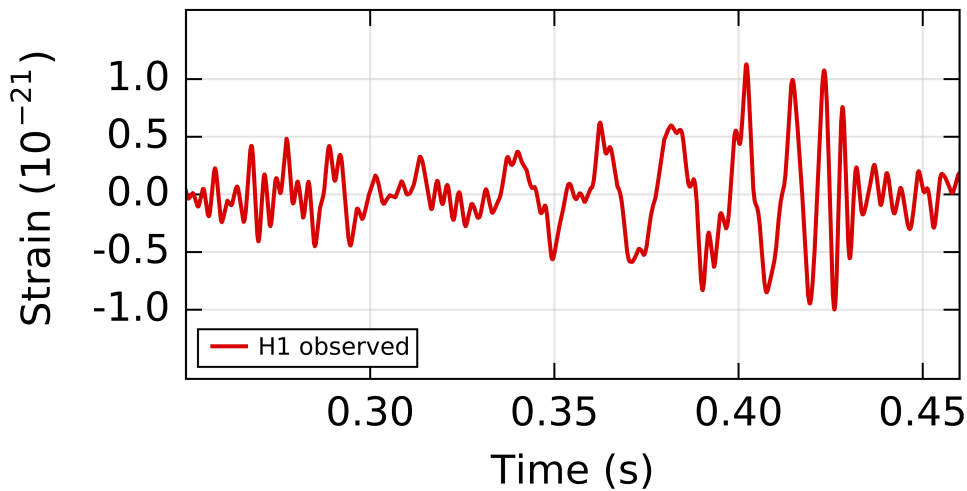


Fig. 2 - Señales detectadas en ambos observatorios LIGO. Deformación (strain) h en función del tiempo t .

En este problema exploraremos algunos aspectos de la física del evento GW150914.

PARTE 1. “Escuchando el universo”: Detección de ondas gravitacionales. (2 puntos)

1a) (0,9 puntos) Para comprender la sensibilidad del LIGO, considere una abeja de 0,1 g de masa, que se encuentra a 10 metros de uno de los espejos del interferómetro. Determine el desplazamiento d que la abeja produce sobre el espejo por atracción gravitatoria. Para esto considere un modelo simplificado, como si el espejo estuviese suspendido de un hilo de 1,0 m de longitud.

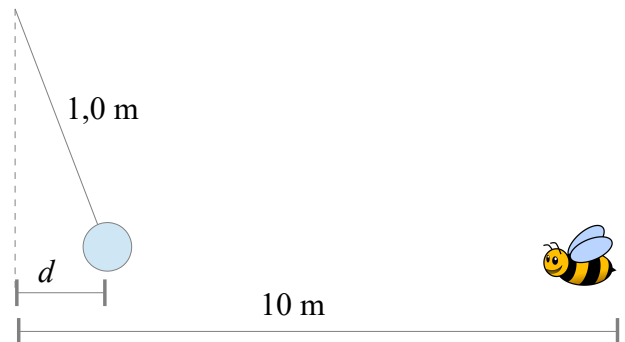


Fig. 3 – Diagrama para la parte 1a.

Este tipo de perturbación sobre el instrumento se denomina “ruido newtoniano”.

1b) (0,4 puntos) A partir de la información de la señal observada (Fig. 2), determine el desplazamiento máximo que sufrió el espejo ante el paso de la onda gravitacional y compare esa distancia con la calculada en el punto 1a) y con el orden de magnitud del diámetro de un protón (igual a 1 femtometro).

1c) (0,7 puntos) Determine la dirección de la fuente que originó las ondas gravitacionales. Para esto calcule el ángulo θ , que forma la dirección de la fuente con respecto al plano mediatriz del segmento de recta determinado por ambos observatorios. (Observe que con la información disponible solo podemos determinar un arco de la posible posición de la fuente.)

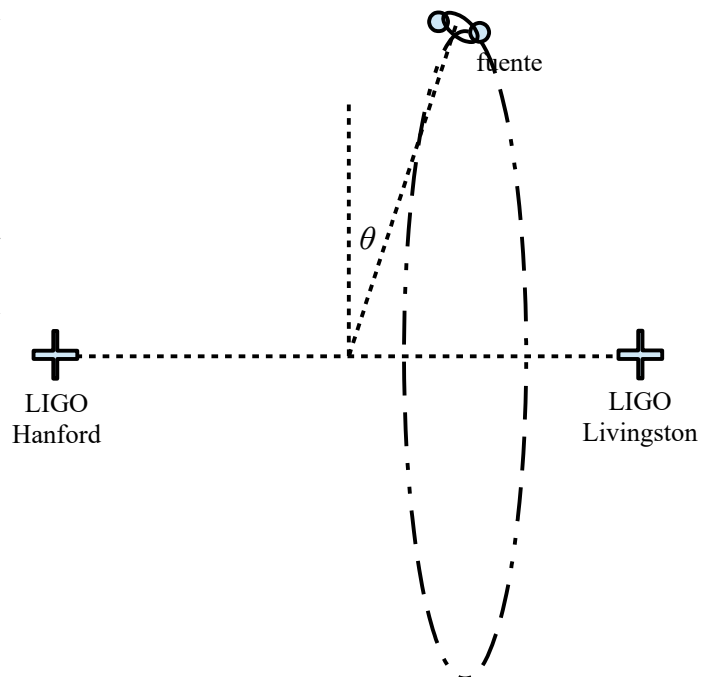


Fig. 4 – Diagrama para la parte 1c (fuera de escala)

PARTE 2. “Danza cósmica”: Sistemas binarios. (3,5 puntos)

Un sistema binario está formado por dos estrellas con masas m_A y m_B . Cada una se mueve siguiendo un movimiento circular uniforme en torno al centro de masas del sistema. La distancia entre ambas estrellas es a . Considere un modelo newtoniano, sin correcciones relativistas.

2a) (1,3 puntos) Determine la frecuencia de rotación del sistema, f .

2b) (0,7 puntos) Determine el módulo de la velocidad de cada estrella, v_A y v_B , en función de la distancia a y las masas m_A y m_B .

2c) (0,9 puntos) Determine la energía mecánica del sistema, E , en función de la distancia y las masas.

2d) (0,6 puntos) De acuerdo con lo anterior, si por algún mecanismo el sistema pierde energía:

2d1) ¿Qué ocurre con la distancia entre las estrellas, aumenta, disminuye o se conserva?

2d2) ¿Qué ocurre con la frecuencia?

2d3) ¿Qué ocurre con la velocidad?

Justifique sus respuestas

PARTE 3. “Música de las esferas”: Radiación de ondas gravitacionales. (2,5 puntos)

De acuerdo con la teoría newtoniana de la gravedad, los sistemas binarios serían estables, es decir que podrían mantenerse perpetuamente en órbita. Por el contrario, de acuerdo con la RG, ciertos sistemas acelerados emiten ondas gravitacionales (de manera similar a como las cargas eléctricas aceleradas emiten ondas electromagnéticas). Esto significa que los sistemas binarios no son estables pues, debido a la emisión de radiación gravitacional, el sistema pierde energía y consecuentemente la distancia entre los cuerpos disminuye. Este proceso se puede estudiar con una buena aproximación utilizando física newtoniana hasta que el sistema alcanza la llamada *mínima distancia de órbita estable* (ISCO = innermost stable circular orbit).

Según la RG, esta distancia orbital es $a_{ISCO} = \frac{6GM}{c^2}$, donde M es la masa total del sistema.

Una vez que se alcanza esta distancia, los cuerpos comienzan a "caer" de forma precipitada uno hacia el otro y es necesario utilizar las ecuaciones completas de la RG (y supercomputadoras) para predecir su movimiento exacto.

Finalmente los objetos colisionan y si se trata de objetos compactos (estrellas de neutrones, agujeros negros) terminan fusionándose para formar un objeto.

Suponga que en $t=0$ los agujeros negros están muy alejados, de tal modo que la energía mecánica del sistema es prácticamente nula, $E_0=0$. Al interactuar gravitatoriamente, comienzan a orbitar en torno al centro de masas. Mediante el mecanismo de radiación gravitacional el sistema pierde energía de modo que en $t=t_{ISCO}$ la distancia entre los agujeros negros es $a=a_{ISCO}$.

Para los agujeros negros correspondientes al evento GW150914, en $t=t_{ISCO}$:

- 3a) (0,7 puntos) Determine la distancia entre los agujeros negros.
- 3b) (0,6 puntos) Determine la frecuencia de rotación del sistema.
- 3c) (0,6 puntos) Determine el módulo de la velocidad de cada agujero negro.
- 3d) (0,6 puntos) Determine la energía gravitacional liberada por el sistema entre $t=0$ y $t=t_{ISCO}$.

PARTE 4. "Conclusión": Colapso y defecto de masa. (2 puntos)

Después de $t=t_{ISCO}$, el sistema binario colapsó rápidamente y los agujeros negros se fusionaron para formar un único agujero negro de masa $m=62 M_S$ en tan solo 20 ms.

4a) (0,7 puntos) Determine la potencia con la que emitió el sistema durante esos 20 ms. Exprese esa potencia como un múltiplo de la luminosidad del Sol ($L_S=3,85 \times 10^{26}$ W).

4b) (1,3 puntos) A partir de la potencia calculada y de la amplitud de la señal detectada (Fig. 2), estime la distancia en años luz a la que se encontraba el sistema binario que generó las ondas gravitacionales observadas. Según la Fig. 2, la frecuencia de la señal detectada en el momento de máxima amplitud es de, aproximadamente, 150 Hz.



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA

Problema N° 1

El LIGO y el año de las Ondas Gravitacionales (y su centenario).

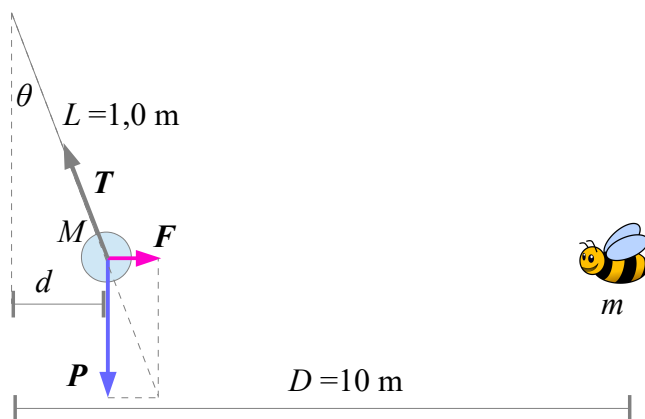
PARTE 1. “Escuchando el universo”: Detección de ondas gravitacionales.

1a) Asumiendo que el ángulo que forma el péndulo con la vertical es pequeño, entonces se cumplen las siguientes relaciones,

$$\frac{d}{L} = \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{F}{P} = \frac{\left(\frac{G M m}{D^2} \right)}{M g}$$

$$d \approx \frac{G m L}{g D^2}$$

$$d \approx 6,8 \times 10^{-18} \text{ m}$$



1b) La máxima deformación observada en la señal del GW150914 es del orden de 10^{-21} . Como cada brazo del LIGO mide 4,0 km, entonces a partir de la definición de deformación (strain) (ec. 1), se tiene que el máximo desplazamiento del espejo fue,

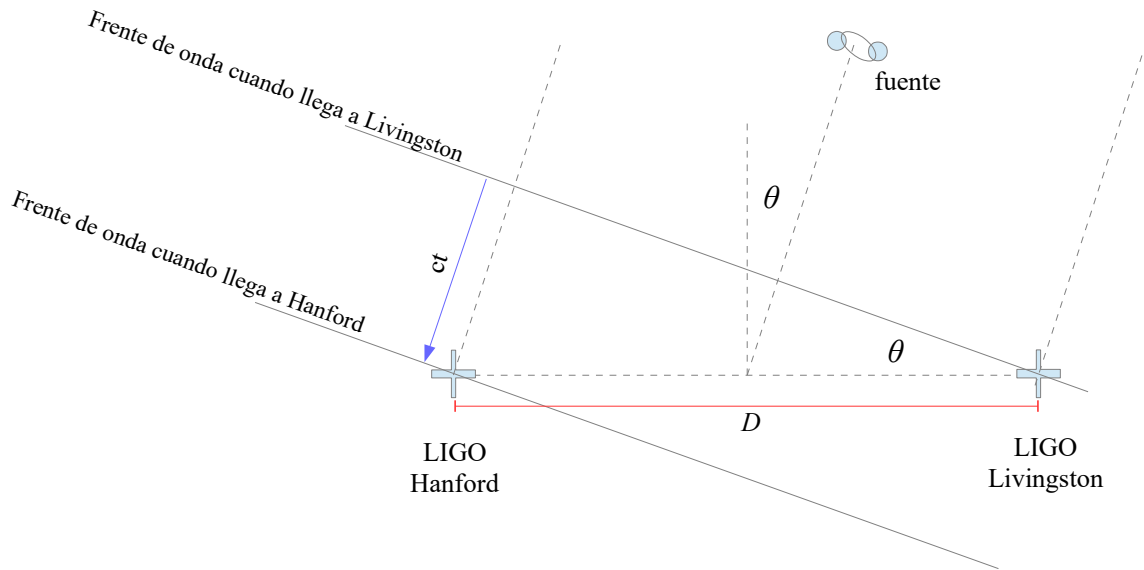
$$\Delta L = h L$$

$$\Delta L = 4 \times 10^{-18} \text{ m}$$

que es menor que el desplazamiento producido por la abeja de la parte anterior.

En relación al tamaño de un protón es del orden de 4 milésimas partes: $\Delta L = 4 \times 10^{-3} \text{ fm}$

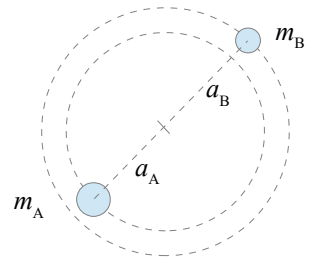
1c) El frente de onda recorrió una distancia $c \cdot t$ en el tiempo t . Donde c es la velocidad de la luz. Es fácil verificar que esa distancia se relaciona con el ángulo θ de procedencia de la onda y la distancia D entre los detectores, $c t = D \sin \theta$. Entonces $\theta = \arcsen \left(\frac{c t}{D} \right)$. $\theta = 43,6^\circ$



PARTE 2. “Danza cósmica”: Sistemas binarios.

2a) Determinar la frecuencia de rotación del sistema.

El centro de rotación de ambas estrellas es el centro de masa del sistema binario, entonces se cumple,



$$a = a_A + a_B$$

$$m_A a_A = m_B a_B$$

De donde, $m_A a_A = m_B (a - a_A)$, entonces, $a_A = a \frac{m_B}{m_A + m_B}$ y $a_B = a \frac{m_A}{m_A + m_B}$.

Cada estrella describe un movimiento circular con la misma velocidad angular ω , mientras se atraen gravitacionalmente,

$$G \frac{m_A m_B}{a^2} = m_A \omega^2 a_A$$

$$G \frac{m_A m_B}{a^2} = m_B \omega^2 a_B$$

Entonces,

$$\omega = \sqrt{G \frac{m_B}{a^2 a_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a^3}}$$

2b)

$$v_A = \omega a_A = \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a^3}} a_A = \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a^3}} a \frac{m_B}{m_A + m_B} = m_B \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a}}$$

$$v_A = m_B \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a}}$$

$$v_B = m_A \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a}}$$

2c)

$$E = K + U = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - G \frac{m_A m_B}{a} = \frac{1}{2} m_A m_B^2 \frac{G}{(m_A + m_B) a} + \frac{1}{2} m_B m_A^2 \frac{G}{(m_A + m_B) a} - G \frac{m_A m_B}{a}$$

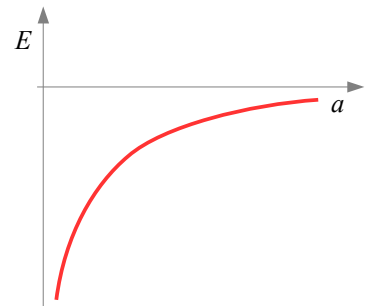
$$E = \frac{1}{2} G \frac{m_A m_B}{a} - G \frac{m_A m_B}{a}$$

$$E = -\frac{1}{2} G \frac{m_A m_B}{a}$$

2d)

2d1)

La energía del sistema es negativa e inversamente proporcional a la distancia entre las estrellas, de modo que si la energía se reduce entonces la distancia también.



2d2)

De acuerdo con la ecuación hallada en la parte 2a, al reducirse la distancia, aumenta la frecuencia.

2d3)

De la ecuación de la parte 2b, la velocidad aumenta.

En resumen: E disminuye, entonces, a disminuye, f aumenta, v aumenta.

PARTE 3. “Música de las esferas”: Radiación de ondas gravitacionales.

3a)

$$a_{ISCO} = \frac{6 G (m_A + m_B)}{c^2}$$

$$a_{ISCO} = 578 \text{ km}$$

3b)

$$f_{ISCO} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a_{ISCO}^3}}$$

$$f_{ISCO} = 33,7 \text{ Hz}$$

3c)

$$v_{A-ISCO} = m_B \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a_{ISCO}}}$$

$$v_{B-ISCO} = m_A \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a_{ISCO}}}$$

$$v_{A-ISCO} = 5,65 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_{B-ISCO} = 6,60 \times 10^7 \text{ m/s}$$

3d)

$$E_{ISCO} = -\frac{1}{2} G \frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$$

$$E_{ISCO} = -2,42 \times 10^{47} \text{ J}$$

$$\Delta E_{ISCO} = E_0 - E_{ISCO} = \frac{1}{2} G \frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$$

$$\Delta E_{ISCO} = 2,42 \times 10^{47} \text{ J}$$

PARTE 4. “Conclusión”: Colapso y defecto de masa.

4a) La masa perdida por el sistema ($\Delta M = 3M_S$) es equivalente a la energía radiada gravitacionalmente desde $t=0$ hasta el colapso,

$$\Delta E_R = \Delta M c^2 = 5,47 \times 10^{47} \text{ J}$$

La energía radiada durante el colapso es,

$$\Delta E_C = \Delta E_R - \Delta E_{ISCO} = 2,98 \times 10^{47} \text{ J}$$

La potencia de esa emisión,

$$P_C = \frac{\Delta E_C}{\Delta t}$$

$$P_C = 1,49 \times 10^{49} \text{ W}$$

$$P_C = 3,87 \times 10^{22} L_S$$

4b) Con la frecuencia ($f = 150 \text{ Hz}$) y la deformación máxima ($h \approx 10^{21}$) medidas por LIGO (Fig. 2), junto con la potencia calculada en parte anterior, se puede, mediante la ec.2, determinar la distancia r a la que se encuentra el sistema binario,

$$h \approx \frac{1}{\pi f r} \sqrt{\frac{G}{c^3} P}$$

$$r \approx \frac{1}{\pi f h} \sqrt{\frac{G}{c^3} P}$$

$$r \approx 1,29 \times 10^{25} \text{ m}$$

$$r \approx 1,36 \times 10^9 \text{ años luz}$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Solución numérica	Puntos
1a	$d \approx \frac{G m L}{g D^2}$	$d \approx 6,8 \times 10^{-18} m$	0,9
1b	$\Delta L = h L$	$\Delta L = 4 \times 10^{-18} m$	0,4
1b	$\theta = \arcsen\left(\frac{c t}{D}\right)$	$\theta = 43,6^\circ$	0,7
2a	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a^3}}$		1,3
2b	$v_A = m_B \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a}}$ $v_B = m_A \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a}}$		0,7
2c	$E = -\frac{1}{2} G \frac{m_A m_B}{a}$		0,9
2d	E disminuye, entonces, a disminuye, f aumenta, v aumenta.		0,6
3a	$a_{ISCO} = \frac{6 G (m_A + m_B)}{c^2}$	$a_{ISCO} = 578 km$	0,7
3b	$f_{ISCO} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{G \frac{m_A + m_B}{a_{ISCO}^3}}$	$f_{ISCO} = 33,7 Hz$	0,6
3c	$v_{A-ISCO} = m_B \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a_{ISCO}}}$ $v_{B-ISCO} = m_A \sqrt{\frac{G}{(m_A + m_B) a_{ISCO}}}$	$v_{A-ISCO} = 5,65 \times 10^7 m/s$ $v_{B-ISCO} = 6,60 \times 10^7 m/s$	0,6
3d	$\Delta E = E_0 - E_{ISCO} = \frac{1}{2} G \frac{m_A m_B}{a_{ISCO}}$	$\Delta E = 2,42 \times 10^{47} J$	0,6
4a	$P_C = \frac{\Delta M c^2 - \Delta E_{ISCO}}{\Delta t}$	$P_C = 1,49 \times 10^{49} W$ $P_C = 3,87 \times 10^{22} L_S$	0,7
4b	$r \approx \frac{1}{\pi f h} \sqrt{\frac{G}{c^3} P}$	$r \approx 1,36 \times 10^9 \text{ años luz}$	1,3



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física

26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA

Problema N° 2

El smartphone: un laboratorio en el bolsillo.

En los últimos años, los smartphones o teléfonos inteligentes se han vuelto omnipresentes y su uso se ha extendido más allá de su propósito original, alcanzando incluso a la enseñanza de la física. La capacidad de procesamiento de estos dispositivos, junto con los sensores incorporados, los convierten en verdaderos laboratorios portátiles, capaces de medir diferentes magnitudes físicas como aceleración, velocidad angular, campo magnético, luminosidad, presión, entre otras.

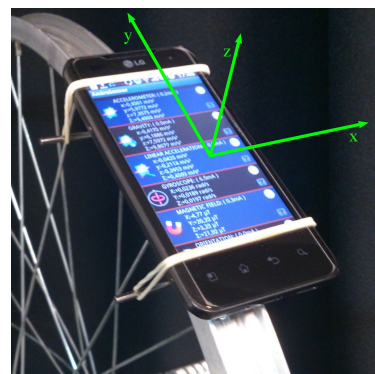


Fig. 1 – Ejes convencionales de un smartphone.

Dos de los sensores más utilizados son el acelerómetro y el giroscopio. Ambos sensores son tri-axiales, es decir conjuntos de tres sensores que miden las tres componentes ortogonales de cada magnitud, según un sistema de referencia solidario con el dispositivo, tal como se muestra en la figura 1, donde el eje z es perpendicular a la pantalla.

Parte 1: Sensor de aceleración. (4 puntos)

El acelerómetro es un sensor microscópico que a pesar de su nombre en realidad mide fuerza por unidad de masa, es decir, debería llamarse campímetro (o sensor de fuerza).

En forma simplificada se puede modelar como una partícula de masa m (masa de prueba), unida a un resorte de constante elástica k . Cuando el sistema se acelera, la masa de prueba se desplaza. Para determinar el desplazamiento de la masa de prueba (y por consiguiente determinar la aceleración) existen diferentes tecnologías, piezoeléctrica, piezoresistiva, capacitiva. En este caso consideraremos un acelerómetro simplificado de tecnología capacitiva como el que se muestra en la Fig. 2, donde una placa metálica cuadrada de área A y masa despreciable, está unida a la masa de prueba, y es paralela a otra placa fija metálica idéntica, formando un condensador de capacidad C_x . Cuando el resorte no realiza fuerza, las placas están separadas una distancia d . Se define el eje del sensor como la

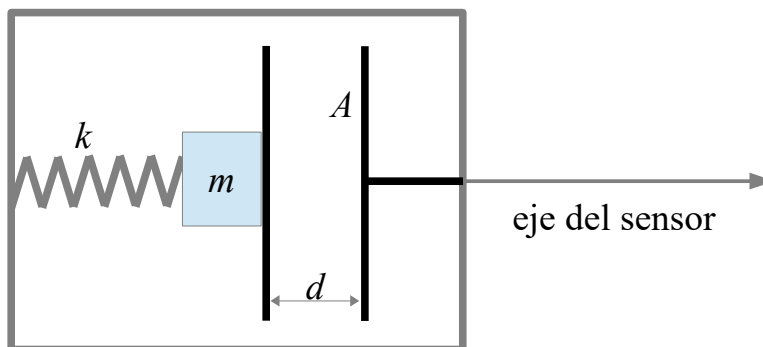


Fig. 2 – Esquema simplificado de un acelerómetro con tecnología capacitiva.

El desplazamiento de la masa de prueba (y por consiguiente determinar la aceleración) existen diferentes tecnologías, piezoeléctrica, piezoresistiva, capacitiva. En este caso consideraremos un acelerómetro simplificado de tecnología capacitiva como el que se muestra en la Fig. 2, donde una placa metálica cuadrada de área A y masa despreciable, está unida a la masa de prueba, y es paralela a otra placa fija metálica idéntica, formando un condensador de capacidad C_x . Cuando el resorte no realiza fuerza, las placas están separadas una distancia d . Se define el eje del sensor como la

dirección en que la masa de prueba tiene libertad de moverse (en este caso la dirección del resorte). En todo este problema considere que la fuerza electrostática es despreciable.

1a) (0,6 puntos) Considerando que el eje del sensor permanece horizontal, determine el desplazamiento s , de la placa izquierda del condensador cuando el sistema se mueve con aceleración constante a , hacia la derecha. Considere positivos los desplazamiento hacia la derecha.

Definiendo C_0 , como la capacidad de C_x , cuando $s=0$:

1b) (1,7 puntos) Determine C_x , como una función lineal de la aceleración, considerando $s \ll d$.
[Sugerencia: Recuerde que si $u \ll 1$ entonces $(1+u)^n \approx 1+nu$]

El condensador C_x , se conecta en paralelo con otro condensador de capacidad constante C_0 . El sistema formado por ambos condensadores permanece aislado y cargado de tal modo que cuando $s=0$, la diferencia de potencial entre las placas de los condensadores es V_0 .

1c) (1,7 puntos) Demuestre que la diferencia de potencial V_s , entre las placas de los condensadores es aproximadamente una función lineal de la aceleración del sensor de la forma,

$$V_s = V_0(1 + \beta a)$$

y determine β en función de los parámetros del acelerómetro.

Parte 2: Principio de equivalencia. (1,8 puntos)

Una de las ideas más brillantes de Einstein es el principio de equivalencia, el cual establece que desde un sistema aislado es imposible discernir entre un campo gravitatorio y un sistema de referencia no inercial (acelerado). Suponga que el acelerómetro se coloca en el piso de un ascensor con su eje z orientado verticalmente hacia arriba.

Determine la magnitud de la aceleración a , medida por el sensor en los siguientes casos:

2a) (0,6 puntos) El ascensor permanece en reposo con respecto a la Tierra.

2b) (0,6 puntos) El ascensor se mueve en caída libre.

2c) (0,6 puntos) El ascensor sube con aceleración a' .

Parte 3: Péndulo físico (4,2 puntos)

Una barra de longitud L y masa M puede girar libremente en un plano vertical, con respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos. En el otro extremo se fija un smartphone de tal modo que su eje y , está dirigido hacia el eje de rotación. El eje z , es paralelo al eje de rotación y el eje x , es perpendicular a la barra. El smartphone tiene masa m , y se puede considerar como una masa puntual que se encuentra a una distancia L del eje de rotación. Considere que el momento de inercia total de la barra y el smartphone es I . Se considera un sistema cartesiano de coordenadas (x',y') , con origen en el eje de rotación, siendo x' , el eje horizontal como se indica en la figura 3.

El acelerómetro del smartphone mide los valores de a_x , a_y , y a_z , y el giroscopio los de las velocidades angulares ω_x , ω_y y ω_z . Es importante destacar que en este sistema siempre se cumple que $a_z=0$, $\omega_x=0$ y $\omega_y=0$, independientemente de las condiciones iniciales.

Determine la posición del smartphone en el sistema de referencia (x',y') , en función de los parámetros del péndulo (M, L, m, I) , y de las medidas obtenidas por el smartphone $(a_x, a_y, \text{ y } \omega_z)$ para cierto instante de tiempo.

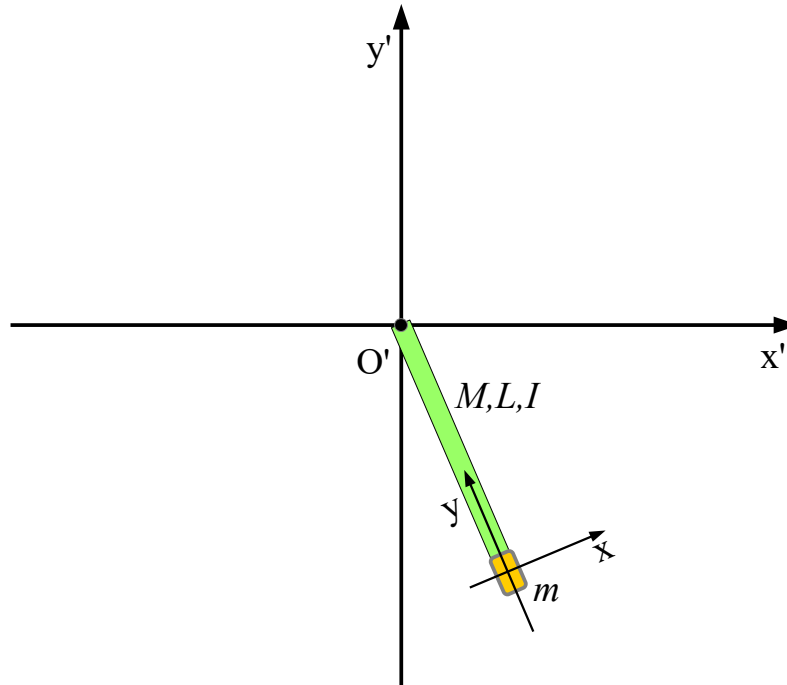


Fig. 3 – Barra con smartphone que puede girar libremente con respecto al origen de coordenadas O' .



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física
26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA
Problema N° 2 - SOLUCIONES

El smartphone: un laboratorio en el bolsillo.

Parte 1.

1a) Por Newton, $-k s = m a$, entonces: $s = -\frac{m}{k} a$

1b) Cuando la placa se desplaza una distancia s , es,

$$C_X(s) = \frac{\epsilon_0 A}{d-s} = \frac{\epsilon_0 A}{d \left(1 - \frac{s}{d}\right)} \approx \frac{\epsilon_0 A}{d} \left(1 + \frac{s}{d}\right) = C_0 \left(1 + \frac{s}{d}\right)$$

Sustituyendo por el desplazamiento calculado en 1a, se obtiene la capacitancia en función de la aceleración del sensor,

$$C_X = C_0 \left(1 - \frac{m}{k d} a\right)$$

1c) La carga inicial del sistema es $Q_0 = 2 C_0 V_0$. Por conservación de la carga, la carga total del sistema es, $C_X V_S + C_0 V_S = 2 C_0 V_0$, de donde,

$$V_S = \frac{2 C_0 V_0}{C_X + C_0} = \frac{2 V_0}{\frac{C_X}{C_0} + 1}$$

Sustituyendo la capacitancia hallada en la parte 1b, se obtiene la diferencia de potencia en función de la aceleración,

$$V_S = \frac{2 V_0}{\left(1 - \frac{m}{k d} a\right) + 1} = \frac{V_0}{1 - \frac{m}{2 k d} a} \approx V_0 \left(1 + \frac{m}{2 k d} a\right)$$

Hemos probado entonces que,

$$V_S \approx V_0 (1 + \beta a), \text{ donde } \beta = \frac{m}{2 k d}$$

Parte 2.

2a) Aplicando Newton a la masa de prueba del sensor orientado verticalmente, se tiene,

$$-k s - m g = 0, \text{ de donde, } s = -\frac{m g}{k}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación 1a, se concluye que el sensor reporta en este caso una aceleración $a = g$ (a pesar de estar en reposo con respecto a la Tierra).

2b) Cuando el ascensor cae, la ecuación de Newton para la masa de prueba es, $-k s - m g = m a$, siendo $a = -g$, la aceleración del sensor. Por lo tanto, $s = 0$. Como el desplazamiento es nulo, la aceleración reportada por el sensor será también nula, $a = 0$ (aunque se encuentra acelerado).

2c) En el caso general, cuando el ascensor sube con aceleración a , la ecuación de Newton es la misma de la parte 2b, y el desplazamiento de la masa de prueba es, $s = -\frac{m(g+a')}{k}$

Comparando esta ecuación con la ecuación 1a, se concluye que el sensor reporta en este caso una aceleración $a = g + a'$.

Parte 3.

La ecuación de movimiento de la barra con el smartphones se obtiene aplicando Newton (considerando despreciables las diferentes fuerzas disipativas), con respecto al eje de giro. Esto es, la suma de los torques con respecto al eje es igual al momento de inercia I , por la aceleración angular α ,

$$-m g L \cos \theta - M g \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha$$

lo que es lo mismo,

$$-\frac{2m+M}{2I} g L \cos \theta = \alpha$$

donde θ , es el ángulo de la barra con respecto al eje x' (θ crece en sentido antihorario).

Como el smartphone se mueve siguiendo una trayectoria circular, la aceleración en coordenadas polares con respecto al sistema de coordenadas $x'-y'$, es,

$$\vec{a}' = -L \omega^2 \hat{r} + L \alpha \hat{\theta}$$

donde ω , es la velocidad angular del sistema, misma que mide el giroscopio del eje z del smartphone.

Los versores polares elegidos coinciden con los ejes del celular: el versor radial es opuesto al eje y ($\hat{r} = -\hat{y}$) y el versor tangencial coincide con el eje x ($\hat{\theta} = \hat{x}$).

Esto significa que las componentes de la aceleración del smartphone en el sistema propio del smartphone x-y, son,

$$a'_x = L\alpha$$

$$a'_y = L\omega^2$$

Como lo probamos en la parte 2c, la aceleración reportada por el acelerómetro es la suma de la aceleración en el sistema x'-y', y la componente opuesta de g. Proyectando g en el sistema x-y del smartphone, se tiene que las aceleraciones reportadas por el smartphone, son,

$$a_x = a'_x + g \cos \theta = L\alpha + g \cos \theta = -\frac{2m+M}{2I} g L^2 \cos \theta + g \cos \theta = \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right) g \cos \theta$$

$$a_y = a'_y - g \sin \theta = L\omega^2 - g \sin \theta$$

donde hemos utilizado la ecuación de movimiento para sustituir la aceleración angular de la primera ecuación.

De ambas ecuaciones se consiguen las expresiones para el seno y el coseno del ángulo de posición de la barra en función de los valores reportados por los sensores del smartphone, a_x , a_y y ω :

$$\cos \theta = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right)}$$

$$\sin \theta = \frac{L\omega^2 - a_y}{g}$$

de donde se puede determinar la posición del smartphone en cualquier instante conociendo las medidas que reportan los sensores y los parámetros del sistema:

$$x' = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2\right)} L$$

$$y' = \frac{L\omega^2 - a_y}{g} L$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Puntos
1a	$s = -\frac{m}{k} a$	0,6
1b	$C_x = C_0 \left(1 - \frac{m}{k d} a \right)$	1,7
1c	$V_s \approx V_0 (1 + \beta a) \quad , \quad \beta = \frac{m}{2 k d}$	1,7
2a	$s = -\frac{m g}{k}$	0,6
2b	$a = 0$	0,6
2c	$a = g + a'$	0,6
3	$x' = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2 \right)} L$ $y' = \frac{L \omega^2 - a_y}{g} L$	4,2
3	$x' = L \sqrt{1 - \left(\frac{L \omega^2 - a_y}{g} \right)^2}$ $y' = \frac{L \omega^2 - a_y}{g} L$	3,8
3	$x' = \frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2 \right)} L$ $y' = L \sqrt{1 - \left(\frac{a_x}{g \left(1 - \frac{2m+M}{2I} L^2 \right)} \right)^2}$	3,8



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física
26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA
Problema N° 3

Propulsor magnetohidrodinámico.

Un propulsor magnetohidrodinámico elemental (MHD), consiste en una caja hueca de largo L , con dos caras abiertas de ancho a y altura h , que se sumerge en un fluido con conductividad eléctrica σ (la conductividad se define como el inverso de la resistividad). La cara inferior y la superior son metálicas y están conectadas a una fuente de corriente continua con diferencia de potencial V , que establece una corriente eléctrica que se supondrá perpendicular a las placas. Las caras de dimensiones L y h , son dos imanes rectangulares no conductores, de modo que dentro de la caja se establece un campo magnético de módulo B , que en forma aproximada vamos a suponer uniforme, dirigido como se indica en la figura 1.

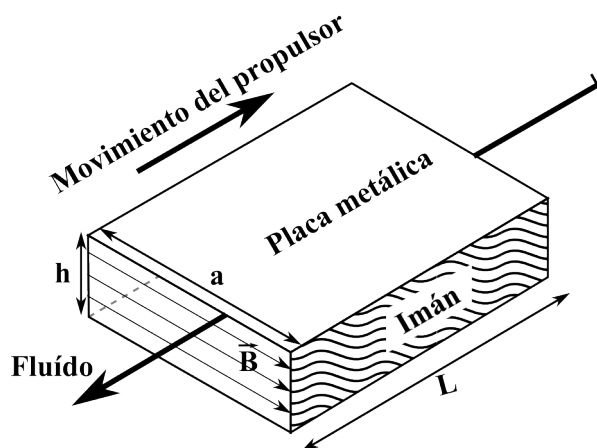


Fig. 1 - Vista en perspectiva del propulsor MHD.

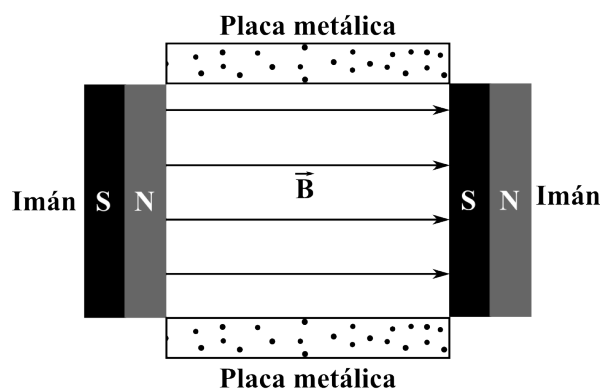


Fig. 2 - Vista trasera del propulsor MHD.

a) (1,4 puntos) Para que el propulsor avance en la dirección del movimiento indicada en la figura 1, determine si la placa de arriba es positiva o negativa, justificando su respuesta.

Escriba la expresión para la fuerza aplicada por el propulsor MHD sobre el fluido.

b) (2,8 puntos) Para el par de imanes considerados, la intensidad del campo magnético depende de la distancia a , según $B(a)=0,42-14a$, donde a está dado en metros y B en Tesla. Esta relación lineal es válida para distancias comprendidas entre 0,005 m y 0,025 m.

Escriba la expresión para la distancia a , entre los imanes, a la cual es máxima la fuerza generada por el propulsor MHD y determine su valor.

Determine el valor del campo magnético para dicha distancia.

c) (1,4 puntos) Se construye un propulsor MHD para funcionar en agua salada, con el ancho calculado en la parte anterior, largo $L=12$ cm y altura $h=2,0$ cm. La fuente es una batería de $V_0=9,0$ V y resistencia interna $r_i=1,1\Omega$. La conductividad eléctrica del agua salada es $\sigma=4,8\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

Escriba la expresión para la intensidad de corriente y determine su valor.

Determine la fuerza generada por el propulsor MHD.

d) (4,4 puntos) Se diseña un pequeño bote de juguete que es impulsado mediante el propulsor MHD de la parte anterior. El bote es una caja de 10 cm de ancho, 6 cm de altura y tiene la misma longitud que el propulsor (Fig. 3). La masa total del bote incluyendo la batería y el propulsor es $m=215$ g. Al moverse, el agua se opone al movimiento del bote con una fuerza de arrastre que es de la forma,

$F_a = \frac{1}{2} \rho C A v^2$, donde $\rho=1,02 \times 10^3$ kg/m³ es la densidad del agua salada, C es el coeficiente

de arrastre, el cual depende de la forma, y que en este caso es $C=1,2$, A es el área frontal en contacto con el agua y v es la velocidad relativa entre el bote y el agua.

Escriba la expresión para la velocidad terminal (aceleración nula) con la que avanza el bote y determine su valor.

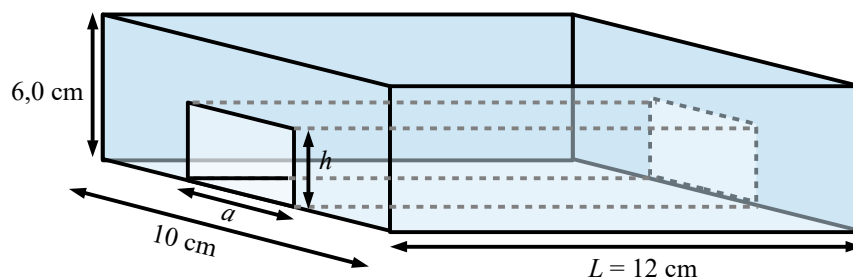
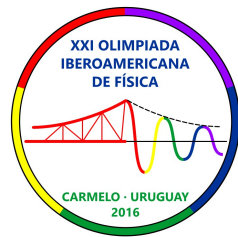


Fig. 3 - Dimensiones del bote de juguete



XXI Olimpiada Iberoamericana de Física
26 - 30 Setiembre 2016, Carmelo, Uruguay



PRUEBA TEÓRICA
Problema N° 3 - SOLUCIONES

Propulsor magnetohidrodinámico

a) Para propulsar el fluido hacia atrás, siendo que el campo está orientado como se muestra en la figura, la corriente eléctrica a través del fluido debe ser hacia abajo. Entonces la placa positiva es la superior.

La intensidad de corriente es $I = \frac{V}{R}$, donde R es la resistencia eléctrica del fluido, $R = \frac{h}{\sigma L a}$.

La fuerza magnética sobre la corriente eléctrica es, $F_p = B I h$.

Es decir, $F_p = B V \sigma L a$

b) Por una parte la fuerza propulsora tiende a aumentar cuando la separación a , aumenta, porque de ese modo se reduce la resistencia eléctrica y aumenta la intensidad de corriente. Por otra parte la fuerza aumenta al reducir la distancia a , porque de ese modo aumenta el campo magnético dentro del propulsor. La fuerza en función de a resulta ser un polinomio de segundo grado de concavidad negativa, $F_p = (0,42 - 14 a) V \sigma L a$.

Sabemos que el vértice de un polinomio $A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ se encuentra en $x = -\frac{A_1}{2 A_2}$.

Entonces la fuerza máxima se obtiene para, $a = -\frac{0,42}{2(-14)} = 0,015 m$

Y el campo para esta distancia es, $B = 0,21 T$

c) A causa de la resistencia interna de la batería, la corriente a través del agua es,

$$I = \frac{V_0}{r_i + \frac{h}{\sigma L a}}. \text{ Con los datos tenemos que, } I = 2,6 A, \text{ de donde } F_p = 0,011 N.$$

d) Cuando el bote está flotando se cumple que peso y empuje son iguales en módulo, $m g = \rho V_d g$, donde V_d , es el volumen de agua que desplaza el bote (suponiendo que el propulsor queda completamente sumergido). Este es, $V_d = 0,10 \cdot 0,12 z - a h L$, donde z , es el nivel de flotación del bote. Entonces,

$z = \frac{\frac{m}{\rho} + a h L}{0,10 \cdot 0,12}$. Esto es, $z = 0,021 m$, lo cual confirma que el propulsor está completamente sumergido.

Entonces el área frontal es $A = 0,10 z - ah$.

Otra forma más sencilla para determinar el área frontal sin conocer z es,

$$A = \frac{V_d}{L} = \frac{m}{\rho L}$$

Observación: el nivel de flotación z debe calcularse de todos modos para verificar que el propulsor se encuentra completamente sumergido.

Cuando el bote se mueve con velocidad constante, el módulo de la fuerza de arrastre es igual al módulo de la fuerza ejercida por el propulsor MHD, de donde la velocidad del bote es,

$$v = \sqrt{\frac{2 F_p}{\rho C (0,10 z - ah)}}$$

o

$$v = \sqrt{\frac{2 F_p L}{C m}}$$

$$v = 0,10 \text{ m/s}$$

Tabla de soluciones

Parte	Solución analítica	Solución numérica	Puntos
a	$F_p = B V \sigma L a$		1,4
b	$x = -\frac{A_1}{2 A_2}$	$a = -\frac{0,42}{2(-14)} = 0,015 \text{ m}$ $B = 0,21 \text{ T}$	2,8
c	$I = \frac{V_0}{r_i + \frac{h}{\sigma L a}}$	$I = 2,6 \text{ A}$ $F_p = 0,011 \text{ N}$	1,4
d	$v = \sqrt{\frac{2 F_p}{\rho C (0,10 z - ah)}}$ o $v = \sqrt{\frac{2 F_p L}{C m}}$	$v = 0,10 \text{ m/s}$	4,4