Problema 1.
Conductividad térmica en un gas (10 puntos)

La conducción térmica se define como la transferencia de energía interna entre dos puntos de un gas cuando hay una diferencia de temperatura ΔT. Si consideramos la corriente calorífica $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, como cantidad de calor transferido por un intervalo de tiempo Δt en una sola dirección, esta queda definida como:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = H = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Donde κ es una constante conocida como coeficiente de conductividad térmica, y A es el área transversal a la dirección en la que se da el flujo de calor.

El camino libre medio λ es la distancia media que recorre una molécula antes de colisionar con otra.

En este problema trataremos un modelo simplificado para encontrar la conductividad térmica de un gas. Para esto asumiremos moléculas esféricas de radio r, que se mueven en una sola dirección con velocidad media, v, y sea n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen.

A. Demuestre que el camino libre medio modelando un área efectiva para la colisión viene dado por **2.5 pt**

$$\lambda = \frac{1}{4\,\pi r^2 n_0}$$

La cual indicará la máxima área para que la molécula pueda colisionar.

Ayuda: Encuentre el número de moléculas con las que choca una de estas al viajar un tiempo.

La teoría cinética de los gases predice que la energía interna de un gas monoatómico está dada por:

$$E_c = Nc_vT = \frac{3}{2}Nk_BT$$

donde N es el número de partículas (moléculas), c_v es el calor específico a volumen constante del gas, k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura del gas.

B.	¿Cuál debe ser el incremento de energía que se le da a cada molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K?	**1.0 pt**

C.	Calcule la cantidad de energía media ganada o liberada por una molécula entre dos choques consecutivos si se encuentra en un gradiente de temperatura $\Delta T/\Delta x$ en la dirección x.	**1.5 pt**

D.	Dé una expresión para la transferencia de energía por unidad de tiempo y área teniendo en cuenta el resultado anterior y sabiendo que hay n_0 partículas por unidad de volumen con velocidad media v.	**1.5 pt**

La teoría cinética de los gases también predice que la velocidad media de las partículas en un gas es:

$$v = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi M}}$$

E.	Con ayuda de los resultados anteriores encuentre una expresión para la conductividad térmica del gas en función de la temperatura del gas.	**2.0 pt**

En un experimento de medición de la conductividad térmica de argón (se comporta como un gas ideal) se obtuvieron las siguientes curvas:

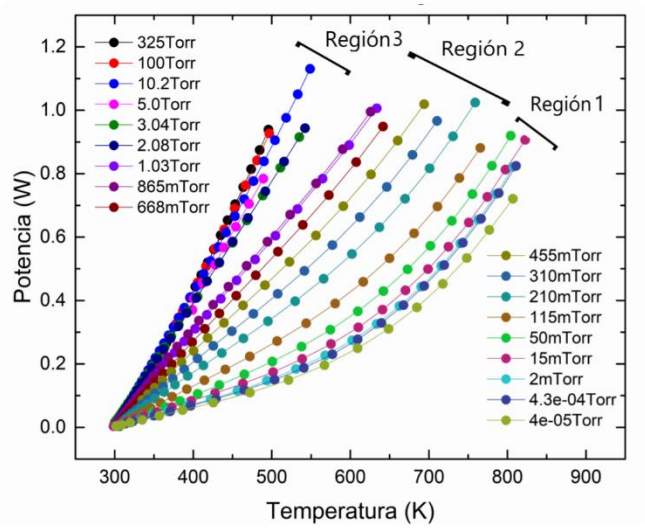

Figura 1. Curvas de potencia vs temperatura a presión constante.

En la Fig.1 se identifican tres regiones debido a diferentes comportamientos:

a. Cuando el camino libre medio es del orden de las dimensiones del contenedor ($\lambda \sim L$) la conductividad térmica deja de ser dependiente de λ debido a los choques con las paredes. Este hecho es la base sobre la cual se basa el funcionamiento de los manómetros de Pirani, ya que permiten relacionar la presión con la conductividad térmica del gas sometido a un flujo de calor constante.
b. Cuando el camino libre medio es mucho menor que las dimensiones del contenedor ($\lambda \ll L$) la conductividad térmica es predicha por las relaciones encontradas anteriormente.
c. Al ser el camino libre medio mucho mayor a las dimensiones del contenedor ($\lambda \gg L$) la conductividad térmica deja de ser dependiente del camino libre medio y además procesos transferencia de calor por radiación tienen mayor relevancia.

F.	Asocie cada una de estas regiones de la figura con estos comportamientos.	**1.5 pt**

Problema 1. Conductividad térmica en un gas (10 puntos)

A. Demuestre que el camino libre medio modelando un área efectiva para la colisión viene dado por **2.5 pt**

$$\lambda = \frac{1}{4\,\pi r^2 n_0}$$

La cual indicará la máxima área para que la molécula pueda colisionar.

El área efectiva debe tener radio igual al diámetro de la molécula porque si las moléculas están más separadas que esta distancia, entonces no se tocarán. La distancia recorrida en un tiempo t, es vt, este arreglo forma un cilindro de radio $2r$ y altura vt.

El número de moléculas que hay en este cilindro es: $N = vt(4\pi r^2)n_0$

Por cada una de estas moléculas habrá una colisión, entonces el tendremos N colisiones mientras la molécula recorre una distancia t. Por tanto, el camino libre medio es la razón entre la distancia recorrida entre el número de colisiones que se dieron en esa distancia:

$$\lambda = \frac{vt}{vt(4\pi r^2)n_v} = \frac{1}{(4\pi r^2)n_0}$$

B. ¿Cuál debe ser el incremento de energía que se le da a cada molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K? **1.0 pt**

El incremento de energía por molécula para incrementar la temperatura del gas en 1K es

$$\frac{3}{2}K_B = c_v.$$

C. Calcule la cantidad de energía media ganada o liberada por una molécula entre dos choques consecutivos si se encuentra en un gradiente de temperatura $\Delta T/\Delta x$ en la dirección x. **1.5 pt**

Sabiendo que la distancia media entre choques es el camino libre medio, la diferencia de energía por partícula es

$$\Delta E = c_v\,\Delta T' = c_v\frac{\Delta T}{\Delta x}\lambda$$

D.	Dé una expresión para la transferencia de energía por unidad de tiempo y área teniendo en cuenta el resultado anterior y sabiendo que hay n_0 partículas por unidad de volumen con velocidad media v.	**1.5 pt**

La cantidad de partículas en un volumen $Av\Delta t$ es $\Delta N = n_0 Av\Delta t$

$$\frac{J}{A} = -\Delta E \frac{1}{A}\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\Delta E\, n_0 v = -c_v n_0\, v\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

E.	Con ayuda de los resultados anteriores encuentre una expresión para la conductividad térmica del gas en función de la temperatura del gas.	**2.0 pt**

$$\kappa = c_v n_0\, v\lambda = \frac{K_B}{\pi r^2}\sqrt{\frac{K_B T}{8\pi M}}$$

F.	Asocie cada una de estas regiones de la figura con estos comportamientos.	**1.5 pt**

De la expresión del camino libre medio se puede ver que a menor presión el camino libre medio aumenta. Región 1 → C

Cuando el camino libre medio es mucho menor que las dimensiones la conductividad térmica no depende de la presión, lo que se puede ver en la acumulación de curvas para diferentes presiones. Región 3 → B

Y cuando es del orden la conductividad térmica depende de la presión y por tanto a diferentes presiones se obtendrían diferentes curvas. Región 2 → A

Problema 2.
Aplicaciones sencillas de la fórmula de Larmor (10 puntos)

En 1897, el físico irlandés Joseph Larmor escribió un artículo donde describía la radiación debida a iones con movimiento acelerado. A pesar de que al momento de su publicación la física de partículas todavía se encontraba en sus inicios, la fórmula de Larmor ha servido para estudiar diferentes modelos. La manera convencional de escribir la potencia total radiada debida a una carga eléctrica puntual acelerada viene dada por

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

donde q es la carga eléctrica, a es su aceleración, c es la velocidad de la luz en el vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. Esta expresión es también conocida como Fórmula de Larmor no relativista.

En este ejercicio estudiaremos la potencia de radiación emitida en diferentes modelos: electrón como partícula uniformemente acelerada, electrón como oscilador armónico simple y el átomo de hidrógeno. En todos estos modelos solamente serán consideradas pérdidas de energía por radiación.

Parte A. Electrón como partícula uniformemente acelerada

Considere un electrón de masa m que desacelera a ritmo constante a desde una velocidad inicial v_0 hasta el reposo ($v = 0$). Responda las siguientes preguntas asumiendo que $v_0 \ll c$ por lo que la fórmula de Larmor puede ser utilizada.

A. 1	Encuentre la razón entre la energía cinética perdida por radiación y la energía cinética inicial $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$ en función de a, v_0, m y las constantes necesarias (de las enlistadas al final del problema).	**1.0 pt**

A. 2	Calcule el valor de la razón $\frac{\Delta E}{E_0}$, si $v_0 = 5 \times 10^4 m/s$ y la distancia total recorrida es igual a $d = 15\text{Å}$.	**1.0 pt**

A. 3	Para el caso de un electrón como partícula en caída libre debido a la influencia de la gravedad, cuál será la razón de energía que es irradiada cuando recorre un centímetro.	**1.0 pt**

Parte B. Electrón como oscilador armónico simple

Considere ahora que el electrón describe un movimiento armónico simple. Asuma que la fórmula de Larmor no relativista todavía es válida.

B. 1	Escriba la expresión de la potencia irradiada promedio sobre un periodo T en función de ω (frecuencia de oscilación) y x_0 (amplitud de la oscilación).	**1.0 pt**

Sugerencia:

El promedio de la función $sin^2\theta(t)$ sobre un periodo T es igual a $\frac{1}{2}$ donde $\theta(t)$ es una función que depende del tiempo.

Si en el instante $t = 0$, el electrón inicia su movimiento con una velocidad que varía de acuerdo a la siguiente expresión $v = (4.030 \times 10^4)\cos[2\pi(6.414 \times 10^{13})t]\, m/s$.

B. 2	Utilizando la expresión del apartado anterior, ¿cuál será la potencia total irradiada promedio?	**1.0 pt**

Parte C. Átomo de hidrógeno

En el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, un electrón no relativista, de masa m, describe un órbita alrededor de un protón con momento angular $L = \hbar$ (estado fundamental).

C.1	Deduzca la expresión para la energía E_0 y el radio de Bohr r_0 para el estado fundamental.	**2.0 pt**

C.2	Demuestre que la razón entre el radio de Bohr r_0 y la longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ para el electrón es igual a	**0.5 pt**

$\frac{1}{\alpha} = 137$. Donde α es conocida como constante de estructura fina.

Admitiendo que en un modelo clásico del átomo de hidrogeno ocurre radiación (No hay estados estacionarios). responda los siguientes apartados.

C.3	Encuentre la expresión para la potencia total radiada cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio r_0, en función de la constante de estructura fina α.	**1.0 pt**

C.4	Determine la expresión de la razón entre la energía radiada por revolución ΔE y la energía del estado fundamental E_0 en función de α y estime su valor.	**1.5 pt**

Constantes

Masa del electrón: $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

Carga del electrón: $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Permeabilidad magnética en el vacío: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3.0 \times 10^{8} m/s$

Constante de Planck: $h = 6.62 \times 10^{-34} J \cdot s$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Permitividad en el vacío: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$

$$1\text{Å} = 10^{-10} m$$

Problema 2.
Aplicaciones sencillas de la fórmula de Larmor (10 puntos)

A. 1 Encuentre la razón entre la energía cinética perdida por radiación y la energía cinética inicial $\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$ en función de a, v_0, m y las constantes necesarias (de las enlistadas al final del problema). **1.0 pt**

Inicialmente el electrón posee únicamente energía cinética, utilizando el concepto de potencia podemos determinar la energía emitida.

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$\Delta U = P \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta U}{E_0} = \frac{P \cdot \Delta t}{\frac{1}{2} m v_0^2}$$

$$\frac{\Delta U}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{3\pi m c v_0^2} \Delta t$$

Aplicando cinemática tradicional determinamos el tiempo t necesario para que el electrón alcance una velocidad igual a cero.

$$v = v_0 - a\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{-v_0}{-a} = \frac{v_0}{|a|}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{3\pi m c v_0^2} \frac{v_0}{|a|} = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi m c v_0}$$

A. 2 Calcule el valor de la razón $\frac{\Delta E}{E_0}$, si $v_0 = 5 \times 10^4 m/s$ y la distancia total recorrida es igual a $d = 15\text{Å}$. **1.0 pt**

Nuevamente con cinemática tradicional encontramos el valor de la aceleración

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

$$d = v_0\left(\frac{v_0}{|a|}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{|a|}\right)^2$$

$$d = \frac{v_0^2}{|a|} - \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{v_0^2}{2|a|}$$

$$|a| = \frac{v_0^2}{2d}$$

Con los valores proporcionados encontramos el resultado numérico utilizando la expresión del literal A.1)

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi m c v_0}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 q^2 v_0}{6\pi m c d}$$

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu_0 e^2 (5\times10^4 m/s)}{6\pi m c (15\times10^{-10} m)} = 2.1\times10^{-10}$$

A. 3 Para el caso de un electrón como partícula en caída libre debido a la influencia de la gravedad, cuál será la razón de energía que es irradiada cuando recorre un centímetro. **1.0 pt**

Utilizando lo aprendido en los literales previos, la situación cambia de movimiento horizontal a movimiento vertical con aceleración igual a g y $v_0 = 0$. La energía inicial será igual a la energía potencial gravitatoria mgh

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 q^2 g}{6\pi m c h}\Delta t$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 q^2 g}{6\pi m c h}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2g}{h}}$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi m c}\sqrt{\frac{2(9.80 m/s^2)}{1.00\times10^{-2} m}} = 2.80\times10^{-22}$$

Parte B. Electrón como oscilador armónico simple

B. 1 Escriba la expresión de la potencia irradiada promedio sobre un periodo T en función de ω (frecuencia de oscilación) y x_0 (amplitud de la oscilación). **1.0 pt**

Ahora el movimiento del electrón se ha modelado como armónico simple. Recordando la expresión de la posición y la aceleración

$$x = x_0 sin(\omega t)$$
$$a = -x_0 \omega^2 sin(\omega t)$$

Reemplazando en la fórmula de Larmor

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 x_0^2}{6\pi c} sin^2(\omega t)$$

Para encontrar la potencia irradiada promedio necesitaremos utilizar la expresión anterior. Si el estudiante hace un análisis de que la función $P(t)$ depende únicamente del promedio de la función seno y utiliza la sugerencia puede reescribir la expresión como

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi c}$$

B. 2 Utilizando la expresión del apartado anterior, ¿cuál será la potencia total irradiada promedio? **1.0 pt**

La expresión de la velocidad en el movimiento armónico simple es igual a

$$v = \omega x_0 cos(\omega t)$$

Por lo que la expresión del literal corresponde a

$$\omega x_0 = 4.030 \times 10^4 m/s$$
$$\omega = 2\pi(6.414 \times 10^{13}) Hz$$
$$\omega = 4.030 \times 10^{14} Hz$$
$$x_0 = 10^{-10} m$$
$$P = \frac{\mu_0 e^2}{12\pi c}(4.030 \times 10^{14})^4 (10^{-10})^2 = 2.394 \times 10^{-16} W$$

Parte C. Átomo de hidrógeno

C.1 Deduzca la expresión para la energía E_0 y el radio de Bohr r_0 para el estado fundamental. **2.0 pt**

El electrón, en el modelo del átomo de Bohr, describe una órbita circular, planteando la segunda ley de Newton

$$F = \frac{ke^2}{r_0^2} = ma$$

$$\frac{ke^2}{r_0^2} = \frac{mv^2}{r_0}$$

$\frac{ke^2}{r_0} = mv^2$ este resultado indica que $U = 2T$

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr_0}$$

Utilizando la expresión del momento angular y despejando el radio de Bohr

$$\hbar = mvr_0$$

$$v = \frac{\hbar}{mr_0}$$

Combinando ambas expresiones para la velocidad, el radio de Bohr es igual al

$$r_0 = \frac{\hbar}{mke^2}$$

La expresión de la energía total se describe como

$$E = T - U = \frac{U}{2} - U$$

$$E = -\frac{U}{2} = -\frac{ke^2}{2r_0}$$

C.2 Demuestre que la razón entre el radio de Bohr r_0 y la longitud de onda de Compton $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ para el electrón es igual a $\frac{1}{\alpha} = 137$. Donde α es conocida como constante de estructura fina. **0.5 pt**

$$\frac{r_0}{\lambda_c} = \frac{\frac{\hbar^2}{mke^2}}{\frac{\hbar}{mc}} = \frac{\hbar c}{ke^2} = 136.97 \approx 137$$

C.3	Encuentre la expresión para la potencia total radiada cuando el electrón se encuentra en una órbita de radio r_0, en función de la constante de estructura fina α.	**1.0 pt**

Escribiendo primero la velocidad en función de α, obtenemos la siguiente expresión

$$\alpha = \frac{\hbar}{r_0 mc}$$

$$v = \frac{\hbar}{mr_0} = \frac{\hbar}{mr_0}\frac{c}{c} = \alpha c$$

La potencia total irradiada viene dada por la fórmula de Larmor y la expresión de la aceleración centrípeta

$$P = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\frac{v^4}{r_0^2}$$

$$P = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^4 c^3}{6\pi r_0^2}$$

C.4	Determine la expresión de la razón entre la energía radiada por revolución ΔE y la energía del estado fundamental E_0 en función de α y estime su valor.	**1.5 pt**

Encontrando primero la energía radiada por revolución

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\alpha c}$$

$$\Delta E = P \cdot T = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^4 c^3}{6\pi r_0^2}\frac{2\pi r_0}{\alpha c}$$

$$\Delta E = \frac{\mu_0 e^2 \alpha^3 c^2}{3 r_0}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\mu_0 c^2}{3k}\alpha^3 \approx 3.26 \times 10^{-6}$$

Problema 3.
Vasos comunicantes (10 puntos)

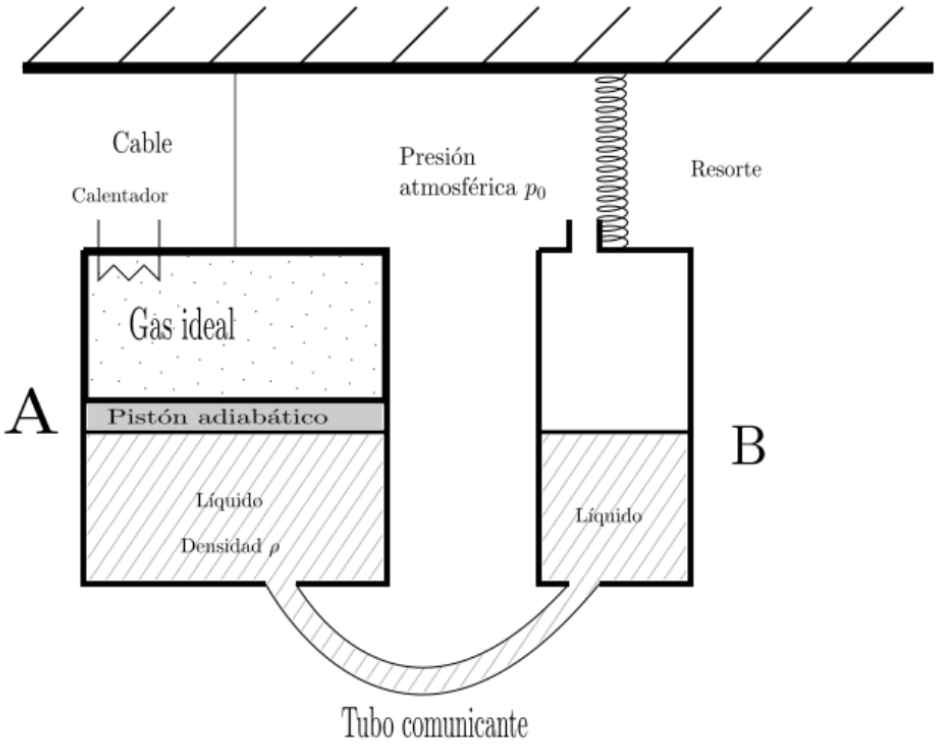

Figura 1. Sistema de vasos comunicados por un tubo delgado.

Se tiene un contenedor A de sección transversal S y un contenedor B de sección transversal $\frac{1}{2}S$, ambos colgados al techo de un laboratorio. El fondo de ambos contenedores está conectado por un tubo delgado y de fricción despreciable, como se muestra en la Figura 1.

El contenedor A está dividido en 2 secciones por un pistón de masa despreciable que puede moverse libremente. La sección del contendor A sobre el pistón está llena de un gas ideal. La sección bajo el pistón en A, el delgado tubo que une a los contenedores, y la parte inferior del contenedor B están llenas de un líquido de densidad ρ. La masa del líquido contenido en el tubo delgado se considera despreciable. A través de un calentador, se puede calentar

el gas ideal en el contenedor A. El tope del contenedor B tiene un pequeño orificio por lo que su parte superior está llena de gas a presión atmosférica p_0. El contenedor A está colgado al techo mediante un cable inextensible y de masa despreciable y, el contenedor B está colgado mediante un resorte de masa despreciable. La aceleración de la gravedad en el sistema es g.

La condición inicial es que la longitud del cable del que se ha suspendido el contenedor A se ajusta de tal forma que los niveles de líquido en ambos contenedores estén a la misma altura. El volumen del gas ideal en esta condición inicial es V_0.

Para este problema, haga las siguientes consideraciones:

- Usando la constante de gases ideales R, el calor específico molar a volumen constante c_v y el calor específico molar a presión constante c_p están dados por: $c_v = \frac{3}{2}R$ y $c_p = \frac{5}{2}R$, respectivamente.
- El líquido puede desplazarse entre los contenedores A y B.
- Aunque el resorte se estire, se asume siempre un equilibrio de fuerzas.
- El tubo delgado que une a los contenedores no se obstruye o bloquea debido al movimiento del contenedor B.

Se calienta el gas ideal de modo que se expande cuasiestáticamente desde la condición inicial hasta que su volumen haya aumentado en ΔV. La constante del resorte usado en este caso es k.

A.	Demuestre que la nueva presión del gas ideal es $p_i = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)\Delta V$	**3.0 pt**

Usando un nuevo resorte de constante k_{ii} se repite el procedimiento del inciso anterior con la diferencia de que la presión del gas en A permanece constante.

B.	Determine esta nueva constante del resorte, k_{ii}, en términos de S, g, y ρ.	**2.0 pt**
C.	Además, determine el calor Q_{ii} que le fue suministrado al gas durante este proceso.	**1.5 pt**

Para cierta constante del resorte, si se repite el proceso de los dos incisos anteriores, existe el caso en que la temperatura del gas baja. Usando ese resorte, se aumenta el volumen del gas en $\Delta V = \frac{1}{4}V_0$, y se observa que su temperatura final es $\frac{15}{16}$ de la temperatura inicial.

D.	Realice una gráfica $p - V$ de este proceso y determine el calor neto en este proceso, Q_{iii}, en términos de V_0 y p_0.	**3.5 pt**

Problema 3. Vasos comunicantes (10 puntos)

A. Demuestre que la nueva presión del gas ideal es **3.0 pt**

$$p_i = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)\Delta V$$

Un cambio de volumen $\Delta V > 0$ en el gas supone un cambio de altura hacia arriba $2\Delta V/S$ en el recipiente B y $\Delta V/S$ hacia abajo en el recipiente A. Como las presiones deben ser iguales en 2 puntos del líquido a la misma altura, se obtiene

$$p' = p_0 + \rho\left(\frac{2\Delta V}{S} + \frac{\Delta V}{S}\right)g = p_0 + \frac{3\rho g}{S}\,\Delta V$$

Sin embargo, un aumento de líquido ΔV en B supone un aumento de masa $\rho\Delta V$, por lo que el resorte se estirará $\frac{\rho\Delta V g}{k}$. Tomando esto en consideración, se obtiene la respuesta

$$p_i = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)\Delta V$$

B. Determine esta nueva constante del resorte, k_{ii}, en términos de S, g, y ρ. **2.0 pt**

Como la presión inicial y final del gas son iguales, usando la respuesta del inciso anterior se obtiene

$$p_0 = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k_{ii}}\right)\Delta V$$

$$k_{ii} = \frac{\rho S g}{3}$$

C. Además, determine el calor Q_{ii} que le fue suministrado al gas durante este proceso. **1.5 pt**

El calor suministrado al gas viene dado por

$$Q_{ii} = c_p nR\Delta T = \frac{5}{2}p_0\Delta V$$

D. Realice una gráfica $p - V$ de este proceso y determine el calor neto en este proceso, Q_{iii}, en términos de V_0 y p_0. **3.5 pt**

Sea p la presión del gas cuando su volumen es V, para ver más claramente la relación entre la presión y el volumen del gas en este proceso, reescribimos el resultado del inciso (B) como

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{3}{S} - \frac{\rho g}{k}\right)(V - V_0)$$

Se puede ver claramente que la presión y el volumen guardan una relación lineal en este proceso, por lo tanto el diagrama pV es como en la Figura 1.

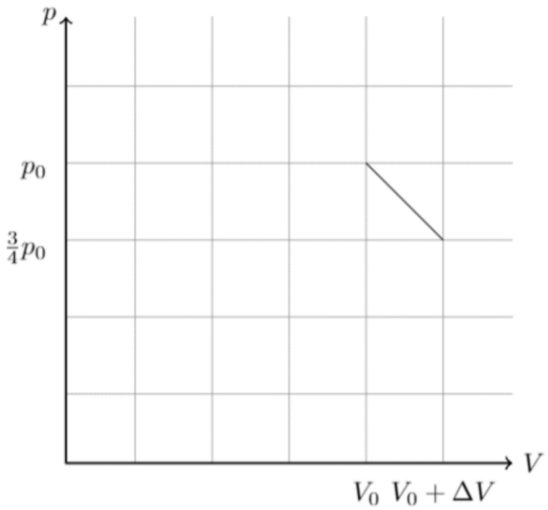

Figura 1. Grafica p-V

Ahora, usando la ley de Boyle-Charles, se puede determinar la presión p_f del gas al finalizar el proceso:

$$\frac{p_0 V_o}{T_0} = \frac{p_f\left(\frac{5}{4}V_0\right)}{\frac{15}{16}T_0} \quad \therefore \; p_f = \frac{3}{4}p_0$$

El cambio de energía interna ΔU del gas durante este proceso es

$$\Delta U = nc_V\Delta T = \frac{3}{2}nR\left(\frac{15}{16}T_0 - T_0\right) = -\frac{3}{32}nRT_0 = -\frac{3}{32}p_0V_0$$

El trabajo hecho por el gas durante este proceso puede ser determinado encontrando el área bajo la curva del diagrama pV, o sea

$$W = \frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{3}{4}p_0\right)\left(\frac{1}{4}V_0\right) = \frac{7}{32}p_0V_0$$

Finalmente, usando la primera ley de la termodinámica, se encuentra la cantidad de calor suministrada al gas durante el proceso

$$Q_{ii} = \Delta U + W = -\frac{3}{32}p_0V_0 + \frac{7}{32}p_0V_0 = \frac{1}{8}p_0V_0$$

GOBIERNO DE EL SALVADOR
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA