Olimpíada Argentina de Física 2023

Instancia Nacional

Prueba Experimental

14 de Octubre de 2023

Nombre: ....

D.N.I.: ....

- Antes de comenzar a resolver la prueba lea cuidadosamente TODO el enunciado de la misma.

- Escriba su nombre y su número de D.N.I. en el sitio indicado. **No escriba su nombre en ningún otro sitio de la prueba.**

- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. Ejemplo: PE 2/5 (Prueba Experimental, hoja dos de cinco). **No enumere las hojas del enunciado.**

- Escriba con lapicera color azul o negra. **No se puede usar ningún otro color.**

- Si necesita más hojas pídalas al Bedel. **No use hojas personales.**

- **No escriba respuestas en las hojas del enunciado pues no serán consideradas.**

- Escriba de un solo lado de las hojas.

- Luego de finalizada la prueba, acomode y deje el equipo como lo encontró.

- Entregue la prueba en el sobre provisto. **No escriba en el sobre su nombre.**

DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD UTTILIZANDO UN PENDULO FÍSICO

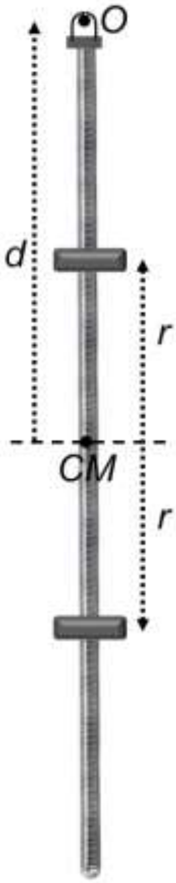
Introducción:

Un péndulo físico consiste de un cuerpo suspendido de un eje alrededor del cual puede rotar. Cuando se saca el péndulo de su posición de equilibrio y se lo libera, el peso del cuerpo ejerce un torque que hace que el péndulo tienda a volver a su posición de equilibrio. De esta manera el péndulo oscilará alrededor de su posición de equilibrio. Para amplitudes pequeñas de oscilación el periodo del péndulo físico es:

$$\mathrm{T} = 2\,\pi \sqrt{\frac{\mathrm{I^O}}{\mathrm{m\,g\,d}}}$$

Donde I^O es el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación *O* y *d* es la distancia desde el centro de masa (CM) del péndulo al eje de rotación, *m* la masa del péndulo y *g* la aceleración de la gravedad.

El péndulo que utilizaremos en este experimento está constituido, como se ve en la figura, por una varilla roscada con un sistema para suspenderla en uno de sus extremos (esto de aquí en más lo denominaremos VR) y dos cilindros de latón ubicados, cada uno de ellos, equidistantes del centro de masa de VR y a una distancia *r* del mismo. Al ser los cilindros de latón idénticos en peso y dimensiones y estar ubicados simétricos al CM de VR, el CM del péndulo coincidirá con el CM de VR.



Figura

Para nuestro péndulo la expresión del periodo será:

$$T = 2\,\pi \sqrt{\frac{A + 2\,m_C\,r^2}{m_T\,g\,d}}$$

donde

$A = I_{VR}^O + 2\,I_C^* + 2\,m_C\,d^2$

I_{VR}^O es el momento de inercia de VR respecto al eje de rotación *O*.

I_C^* es el momento de inercia de cada cilindro de latón respecto a su propio centro de masa.

m_C es la masa de cada cilindro.

r es la distancia del centro de masa de cada cilindro al centro de masa de VR.

$m_T = m_{VR} + 2\,m_C$ es la masa total del péndulo.

g es la aceleración de la gravedad.

d es la distancia del CM de VR hasta el eje de oscilación.

Objetivo: Determinar experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo físico.

Elementos disponibles

- Varilla roscada cuya masa es (49,0 ± 0,5) g
- 2 cilindros de latón de (58,0 ± 0,3) g de masa cada uno
- Cronómetro
- Regla
- Marcador
- Papel milimetrado

Procedimiento

1. Determine la posición del centro de masa (CM) de la varilla roscada y márquela.
2. Mida la distancia ***d*** desde el CM hasta el eje de suspensión.
3. Coloque los cilindros en la varilla roscada como se muestra en la Figura.
4. Mida la distancia ***r*** y el tiempo de al menos 15 oscilaciones.
5. Repita el punto 4 para distintos valores de ***r***.

Consignas

1. Informe el valor de ***d*** con su incerteza.
2. Construya una tabla con todos los valores medidos.
3. Construya una tabla con los valores de r^2 y T^2.
4. Grafique T^2 en función de r^2.
5. Determine el valor de la pendiente de la recta obtenida.
6. Calcule el valor de la aceleración de la gravedad con su incerteza.

Consigna sólo para el nivel 2

7. Conociendo que $I_C^* = (66{,}3 \pm 0{,}4)\ g\ cm^2$ determine el valor del momento de inercia de la varilla roscada I_{VR}^O respecto al eje de rotación con su correspondiente incerteza.

Datos útiles

Incertidumbre asociada a la función x^2:

$$\Delta\left(x^2\right) = 2\,x\,\Delta x$$

***<u>IMPORTANTE</u>*:**

- **Siempre que manipule el péndulo, para modificar la posición de los cilindros metálicos, éste debe estar fuera del soporte.**
- **El soporte metálico posee una muesca sobre la cual se debe colocar el péndulo para hacerlo oscilar.**

HOJA DE RESPUESTA NIVEL 1	Puntaje
1- Valor de *d*:	**1) 2** **2) 2**
2- Tabla: Confeccione la tabla en las hojas provistas e identifíquela Claramente.	**1) 5** **2) 5**
3- Tabla: Confeccione la tabla en las hojas provistas e identifíquela claramente	**1) 2** **2) 2**
4- Gráfico: Haga el gráfico en las hojas milimetradas provistas e identifíquelos claramente.	**1) 3** **2) 3**
5- Valor de la pendiente:	**1) 4** **2) 4**
6- Valor de la aceleración de la gravedad:	**1) 4** **2) 3**
7- Valor del momento de inercia:	**2) 1**
PUNTAJE TOTAL	**20**

1)

$d = (24{,}8 \ \pm 0{,}1)\ cm$

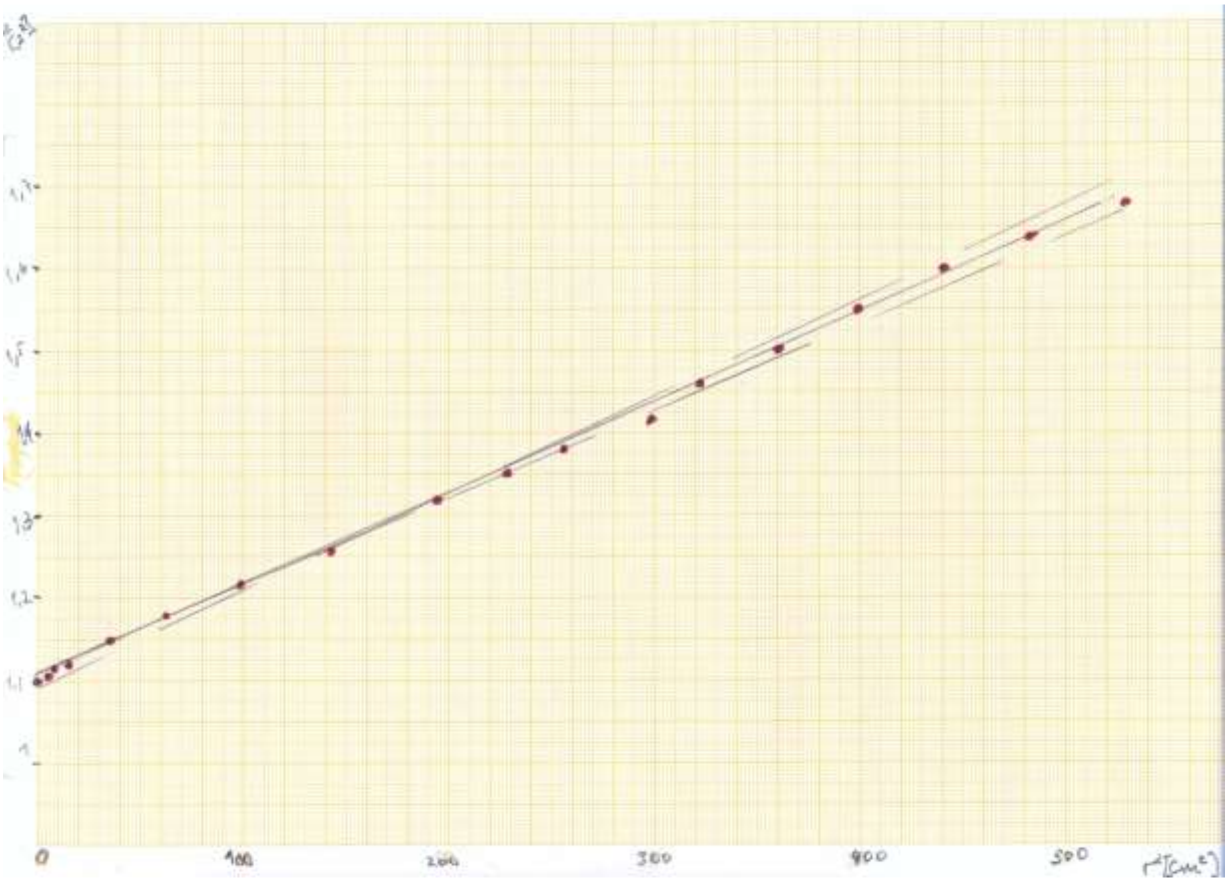
2)

n	*r [cm]* ($\pm$ *0,1 cm)*	t_1 *[s]* ($\pm$ *0,2 s)*	t_2 *[s]* ($\pm$ *0,2 s)*	*t [s]* ($\pm$ *0,2 s)*	*T [s]* ($\pm$ *0,01 s)*
1	23,0	25,97	25,97	25,97	1,30
2	22,0	25,66	25,66	25,66	1,28
3	21,0	25,31	25,34	25,325	1,27
4	20,0	24,94	24,97	24,955	1,25
5	19,0	24,63	24,62	24,625	1,23
6	18,0	24,21	24,18	24,195	1,21
7	17,0	23,88	23,88	23,88	1,19
8	16,0	23,56	23,53	23,545	1,18
9	15,0	23,22	23,25	23,235	1,16
0	14,0	22,97	22,97	22,97	1,15
10	12,0	22,47	22,41	22,44	1,12
11	10,0	22,09	22,06	22,075	1,10
12	8,0	21,78	21,75	21,765	1,09
13	6,0	21,47	21,4	21,435	1,07
14	4,0	21,19	21,16	21,175	1,06
15	2,0	21,03	21,09	21,06	1,05
16	0,5	21,00	21,00	21	1,05

3)

n	r^2 *[cm²]*	Δr^2 *[cm²]*	T^2 *[s²]*	ΔT^2 *[s²]*
1	529	5	1,69	0,03
2	484	4	1,65	0,03
3	441	4	1,60	0,03
4	400	4	1,56	0,02
5	361	4	1,52	0,02
6	324	4	1,462	0,02
7	289	3	1,426	0,02
8	256	3	1,39	0,02
9	225	3	1,35	0,02
0	196	3	1,32	0,02
10	144	2	1,26	0,02
11	100	2	1,22	0,02
12	64	2	1,18	0,02
13	36	1	1,15	0,02
14	16	1	1,13	0,02
15	4,0	0,4	1,11	0,02
16	0,3	0,1	1,10	0,02

4)



5)

Tomo dos puntos de la recta que considero el “mejor ajuste” y otros dos de la que considero que difiere más en su pendiente.

Del mejor ajuste (480 cm^2, 1,635 s^2) y (40 cm^2, 1,155 s^2)

a = 0,00109 s^2/cm^2

De la otra recta (460 cm^2, 1,630 s^2) y (80 cm^2, 1,185 s^2)

a = 0,00118 s^2/cm^2

Entonces tomamos como valor de la pediente

a = (0,00109 $\pm$ 0,00009) s^2/cm^2

6)

$$a = \frac{2\, m_C}{m_T\, g\, d}$$

$$g = \frac{2\,m_C}{m_T\ d\ a}$$

$$g = (1030\ \pm 80)\ \frac{cm}{s^2}$$

7) Del ajuste lineal tenemos que:

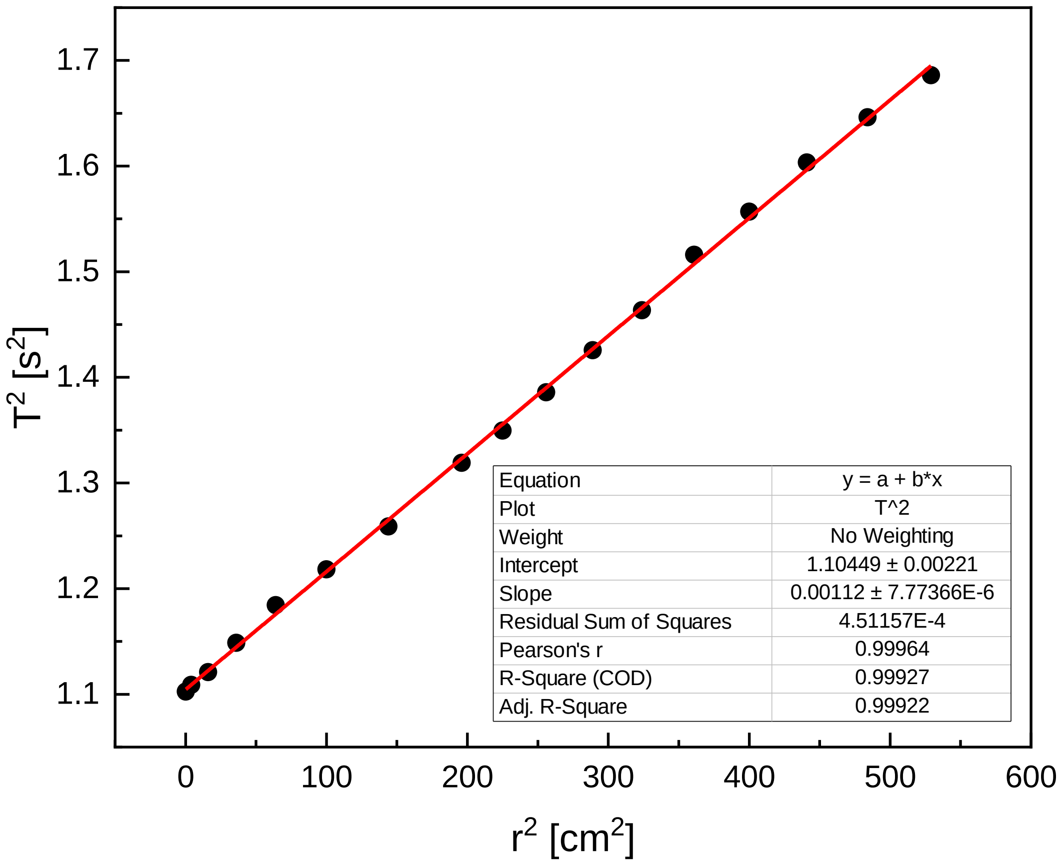
$$b = \frac{I_{VR}^{O} + 2\ I_C^{*} + 2\ m_C\ d^2}{m_T\ g\ d}$$

Por lo tanto:

$$I_{VR}^{O} = b\ m_T\ g\ d - 2\ I_C^{*} - 2\ m_C\ d^2$$

Del gráfico tenemos que b = (1,11 $\pm$ 0,02) s^2

Por lo tanto $I_{VR}^{O} = (4{,}6\ \pm 0{,}4) \times 10^6\ g\ cm^2$



$$g = (1000 \pm 10)\ \frac{cm}{s^2}$$

$$g = (1000 \pm 20)\ \frac{cm}{s^2}$$

$$I_{VR}^{O} = (4{,}45 \pm 0{,}05) \times 10^5\ g\ cm^2$$

Otro docente determinó

$$g = (980 \pm 20)\ \frac{cm}{s^2}$$

Olimpíada Argentina de Física 2023

Instancia Nacional

Prueba Teórica

Nombre: ....

D.N.I.: ....

- Antes de comenzar a resolver la prueba lea cuidadosamente TODO el enunciado de la misma.

- Escriba su nombre y su número de DNI en el sitio indicado en esta portada. **No escriba su nombre en ningún otro sitio de la prueba.**

- Escriba la solución en las hojas provistas y numérelas. Ejemplo: PT1 2/5 (Problema Teórico 1, hoja dos de cinco). **<u>No</u> enumere las hojas del enunciado.**

- Escriba con lapicera color azul. **No se puede usar ningún otro color.**

- Si necesita más hojas pídalas al Bedel. **No use hojas personales.**

- **No escriba respuestas en las hojas del enunciado pues no serán consideradas.**

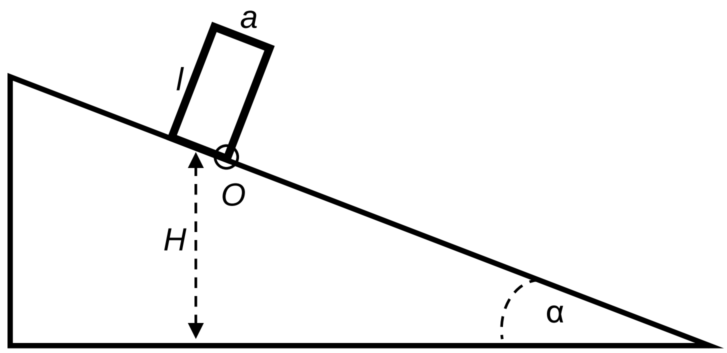
- Escriba de un solo lado de las hojas.

- Entregue la prueba en el sobre provisto. Deberá engrampar la solución de cada problema por separado: en primer lugar la hoja de respuestas del problema y luego las hojas con la resolución correspondiente que haya llevado a cabo. **No escriba en el sobre su nombre.**

Problema Teórico 1.

Sobre un plano inclinado, que forma un ángulo $\alpha = 25°$ con la horizontal, y a una altura $H = 5\ m$ respecto al piso, se apoya un cuerpo homogéneo de masa $m = 100\ kg$; inicialmente está en reposo respecto al plano inclinado. La forma del cuerpo es la de un prisma de base cuadrada de altura $l = 2\ m$ y longitud de la base $a = 1\ m$.

(NOTA: Consideramos el valor de la aceleración de la gravedad igual a 10 m/s^2)



Suponiendo que no existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado

a) Calcule la velocidad con la que el cuerpo llegará a la base del plano inclinado.
b) Determine cuánto tiempo demorará el cuerpo en llegar a la base del plano inclinado.

Suponiendo ahora que existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado y que los respectivos coeficientes de rozamiento estático y dinámico son $\mu_e = 0{,}6$ y $\mu_d = 0{,}4$.

c) Determine cuál será la aceleración del cuerpo y el valor de la fuerza de rozamiento.

Suponiendo ahora las mismas condiciones que para el ítem c), cuando el cuerpo se encuentra sobre el plano inclinado la fuerza que ejerce la superficie sobre él no es homogénea. La fuerza se va incrementando desde el punto de la superficie que se encuentra a mayor altura hacia el punto de la superficie que se encuentra a menor altura (lado de la base denominado O). Por lo tanto, la ubicación de la resultante de la fuerza que ejerce la superficie sobre el cuerpo (fuerza normal) no estará ubicada a la altura del centro de masa, sino que estará desplazada una cierta distancia.

d) Encuentre una expresión para la posición de la fuerza normal que ejerce la superficie en función del ángulo del plano inclinado, medida desde la normal al plano inclinado y que pasa por el centro de masa.

Las siguientes dos consignas son sólo para el nivel 2.

e) Determine cuál debe ser el mínimo valor del ángulo α para que, cuando apoyemos el cuerpo, este no deslice, sino que rote alrededor del eje paralelo a la base del plano inclinado y que pasa por el punto O.

Si ahora el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal es de 30° y sabiendo que el momento de inercia del prisma, respecto a un eje que pasa por su centro de masa que es paralelo al eje de rotación, es:

$$I_G = \frac{1}{12}\, m\, (l^2 + a^2)$$

f) Determine el módulo de la aceleración angular del prisma y el módulo de la aceleración de su centro de masa cuando rote alrededor del eje O.

Problema Teórico 1.
Hoja de respuestas.

Inciso			Puntaje
a)			
b)			
c)			
d)			

__Las siguientes dos consignas son sólo para el nivel 2.__

e)		
f)		

RESOLUCIÓN:

Suponiendo que no existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado

a) *Calcule la velocidad con la que el cuerpo llegará a la base del plano inclinado.*

Como no hay rozamiento la energía se conserva. Entonces sabemos que:

$$m\,g\,H = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Despejando obtenemos:

$$v = \sqrt{2\,g\,H} = 10\,\frac{m}{s}$$

b) Determine cuánto tiempo demorará el cuerpo en llegar a la base del plano inclinado.

La aceleración que tiene el cuerpo sobre el plano inclinado es:

$$a = g\,sen(\alpha) = 4{,}226\,\frac{m}{s^2}$$

La distancia que recorre el cuerpo sobre el plano inclinado es:

$$d = \frac{H}{sen(\alpha)} = 11{,}831\,m$$

Sabemos que $d = \frac{1}{2}\,a\,t_f^2$, entonces

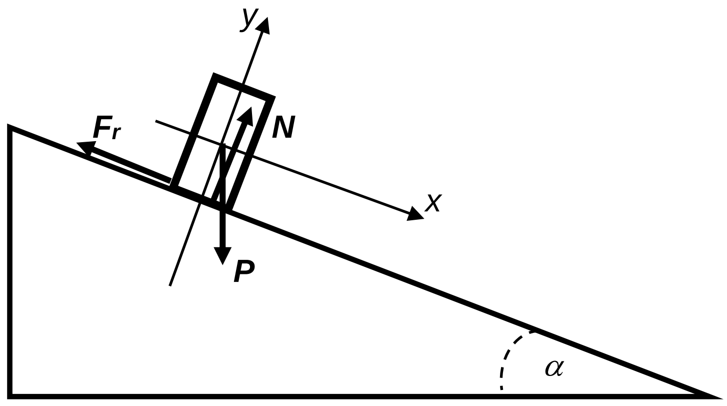
$$t_f = \sqrt{\frac{2\,d}{a}} = 2{,}336\,s$$

(Nota: también el punto a) se puede responder utilizando cinemática. Con este valor del tiempo que demora el cuerpo en recorrer el plano inclinado y sabiendo que, como el cuerpo parte del reposo, $v = a\,t_f = 10\,m/s$)

Suponiendo ahora que existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado y que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico son respectivamente μ_e = 0,6 y μ_d = 0,4.

c) *Determine cuál será ahora la aceleración del cuerpo y el valor de la fuerza de rozamiento.*

Viendo en la figura las fuerzas que actúan sobre el cuerpo fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal de la superficie y la fuerza de rozamiento. Teniendo en cuenta el sistema de ejes cartesianos graficado tenemos que las expresiones de estas fuerzas son:



$$\vec{P} = m\,g\,sen(\alpha)\,\hat{\imath} - m\,g\cos(\alpha)\;\hat{\jmath} = 422{,}618\;N\,\hat{\imath} - 906{,}308\;N\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{N} = m\,g\cos(\alpha)\;\hat{\jmath} = 906{,}308\;N\,\hat{\jmath}$$

Como inicialmente el cuerpo está en reposo, calculemos el máximo valor que puede tomar la fuerza de rozamiento estático.

$$\left|\vec{F}_{rmax}\right| = \mu_e\left|\vec{N}\right| = 543{,}785\;N$$

Como vemos este valor es mayor a la componente de la fuerza peso paralela al plano inclinado, y por lo tanto, el cuerpo permanecerá en reposo ()

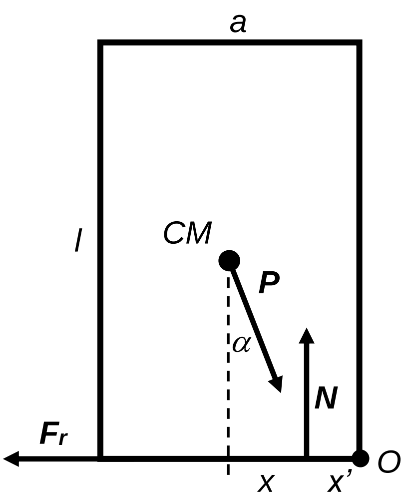
$$a = 0$$

y la fuerza de roce será:

$$\vec{F_r} = -m\,g\,sen(\alpha)\,\hat{\imath} = -422{,}618\;N\,\hat{\imath}$$

d) Encuentre una expresión para la posición de la fuerza normal que ejerce la superficie en función del ángulo del plano inclinado.

Al estar el cuerpo apoyado sobre el plano inclinado tenderá a rotar sobre el eje que pasa por el vértice inferior. Debido a esto no apoya de manera uniforme sobre la superficie, haciendo que la resultante de la fuerza que le ejerce la superficie (N) se desplace hacia el eje respeto al cual tiende a rotar. El cuerpo no va a rotar mientras la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre él sea igual a cero.



La expresión de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

$\vec{P} = \ m\ g\ sen(\alpha)\ \hat{\imath} - m\ g\cos(\alpha)\ \hat{\jmath} = 422{,}618\ N\ \hat{\imath} - 906{,}308\ N\ \hat{\jmath}$
$\vec{N} = m\ g\cos(\alpha)\ \hat{\jmath} = 906{,}308\ N\ \hat{\jmath}$
$\overrightarrow{F_r} = \ -m\ g\ sen(\alpha)\ \hat{\imath} = -422{,}618\ N\ \hat{\imath}$

Si calculamos los momentos de las fuerzas respecto al centro de masa (CM) tenemos:

$$N\ x - F_r\ \frac{l}{2} = 0$$

Despejando y reemplazando obtenemos:

$$x = \frac{l}{2}\ \tan{(\alpha)}$$

Si ahora calculamos los momentos respecto al eje que pasa por el vértice inferior (O) tenemos:

$$m\ g\cos(\alpha)\ \frac{a}{2} - m\ g\ sen(\alpha)\frac{l}{2} - m\ g\cos(\alpha)\ x' = 0$$

Despejando obtenemos:

$$x' = \frac{a}{2} - \frac{l}{2}\ \tan{(\alpha)}$$

Teniendo en cuenta que $x + x' = \frac{a}{2}$ vemos que el resultado coincide con el obtenido calculando los momentos respecto al CM.

e) Determine cuál debe ser el mínimo valor del ángulo α, que subtiende el plano inclinado con la horizontal, para que cuando apoyemos el cuerpo este no deslice, sino que rote alrededor del lado de la base denominado O.

El cuerpo comenzará a rotar cuando la posición de la fuerza normal que ejerce el piso (N) deba estar ubicada en el vértice O para compensar el momento que ejercen las otras fuerzas, es decir *x = a/2*.

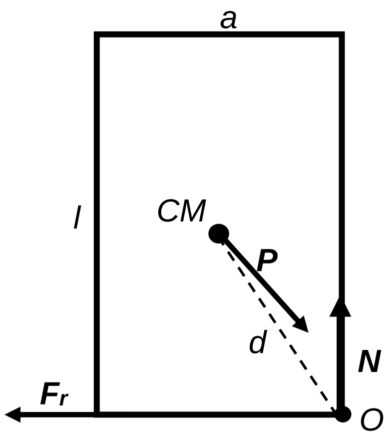
Teniendo esto en cuenta resulta

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{l} = 0{,}464 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 26{,}565°$$

Si ahora el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal es de 30°, y sabiendo que el momento de inercia del prisma, respecto a un eje que pasa por su centro de masa que es paralelo al eje de rotación, es:

$$I_G = \frac{1}{12}\ m\ (l^2 + a^2)$$

f) Determine el módulo de la aceleración angular del prisma y el módulo de la aceleración de su centro de masa cuando rote alrededor del eje O.



Primero verificaremos que para este ángulo el cuerpo no va a deslizar. El cuerpo comenzará a deslizar cuando, para equilibrar al sistema, la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo.

$$\mu_e \, m \, g \cos(\alpha) \; = m \, g \, sen(\alpha)$$

$$\mu_e \; = tan(\alpha)$$

$$\alpha = \operatorname{atan}(\mu_e) = 30{,}964°$$

Por lo tanto, el cuerpo va a rotar sin deslizar.

Sabemos que para la rotación se cumple que:

$$I_O \, \gamma = \sum_i \tau_i$$

Donde γ es la aceleración angular, I_O es el momento de inercia respecto al eje de rotación y τ_i son los momentos que ejercen las fuerzas respecto al eje de rotación. Como vemos la fuerza normal y la fuerza de rozamiento no ejercerán momento respecto al eje de rotación. Además, el momento de inercia respecto al eje de rotación, aplicando el teorema de Steiner, es $I_O = I_G + m\, d^2$, donde d es la distancia que hay del eje de rotación al CM. Entonces:

$$I_O = \frac{1}{12}\, m\,(l^2 + a^2) + m\,\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\, m\,(l^2 + a^2) =$$

Por lo tanto:

$$I_O \, \gamma = m \, g \cos(\alpha) \, \frac{a}{2} \, - m \, g \, sen(\alpha) \frac{l}{2}$$

$$\gamma = 3 \, g \, \frac{\left[\cos(\alpha) \, \frac{a}{2} \, - sen(\alpha) \frac{l}{2}\right]}{l^2 + a^2} = -\,0{,}402 \, \frac{rad}{s^2}$$

$$|\gamma| = 0{,}402\ \frac{rad}{s^2}$$

Este valor es negativo de la aceleración angular es debido a que el cuerpo girará en sentido horario.

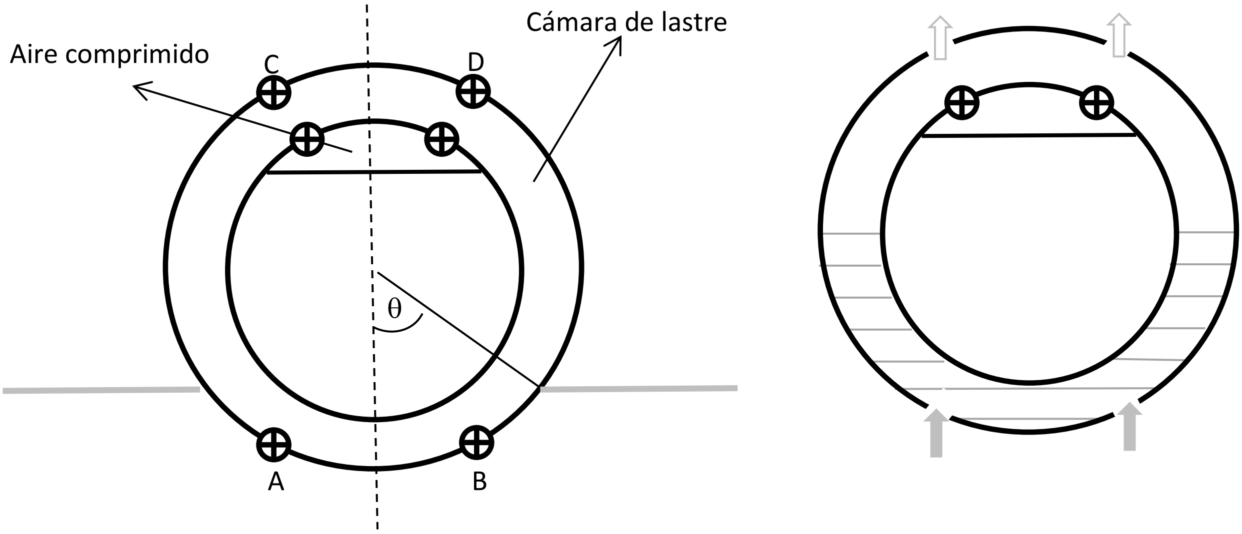
Sabemos que al ser una rotación pura alrededor de O el módulo de la aceleración del centro de masa será:

$$|a_{CM}| = d\ |\gamma| = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\ |\gamma| = \ 0{,}449\ \frac{m}{s^2}$$

Inciso		Puntaje
a.	$v = \sqrt{2\,g\,H} = 10\ \frac{m}{s}$	1) 2 2) 1
b.	$t_f = \sqrt{\frac{2\,d}{a}} = 2{,}336\ s$	1) 2 2) 1
c.	$a = 0$ $\overrightarrow{F_r} = -\,m\,g\,sen(\alpha)\,\hat{\imath} = -422{,}618\ N\,\hat{\imath}$	1) 3 2) 2
d.	$x = \frac{l}{2}\tan(\alpha)$	1) 3 2) 2
e.	$\tan(\alpha) = \frac{a}{l} = 0{,}464 \quad \rightarrow \quad \alpha = 26{,}565°$	2) 2
f.	$\lvert\gamma\rvert = 0{,}402\ \frac{rad}{s^2}$ $\lvert a_{CM}\rvert = d\,\lvert\gamma\rvert = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\ \lvert\gamma\rvert = 0{,}449\ \frac{m}{s^2}$	2) 2

Problema Teórico 2: Submarino Titán.

El pasado 18 de junio el submarino Titán de la empresa Oceangate perdió contacto con la superficie. El mismo estaba diseñado para alcanzar una profundidad de $4000\,m$ con una tripulación de 5 pasajeros.
En la figura se muestra una imagen del mismo. Su masa aproximada, con tripulación, es de $11000\,Kg$ y está fabricado con titanio y fibra de carbono.
Para poder realizar algunos cálculos aproximados vamos a suponer que el submarino es básicamente cilíndrico con un largo de $6{,}7\,m$ y un diámetro externo de $2{,}7\,m$. Como todo submarino se sumerge incorporando agua en la cámara de lastre (ver figura). Cuando quiere sumergirse, se abren las válvulas A, B, C y D, de tal manera que por A y B ingresa el agua y por C y D sale el aire de la cámara; incorporada el agua necesaria se vuelven a cerrar las válvulas. Para volver a la superficie, se abren las válvulas A y B y se inyecta aire comprimido para extraer el agua de la cámara de lastre.



a) Suponiendo que todavía no se incorporó el lastre, ¿cuál es la fracción de volumen V_S que está sumergida en el agua?
b) ¿Cuál debería ser la magnitud del peso para que el submarino se sumerja completamente? ¿Cuánta masa de agua se debería usar como lastre?
c) ¿Qué radio interno debe tener la cámara para incorporar esa masa de agua más $100\,kg$?
d) Si el submarino se encuentra a una profundidad de $4000\,m$ ¿cuál debería ser la presión mínima que debería suministrar el aire comprimido para que el submarino comience a emerger?

Teniendo en cuenta que, cuando un cuerpo se mueve en un fluido, existe una fuerza de arrastre que se opone al movimiento, la cual se puede expresar de la siguiente forma,

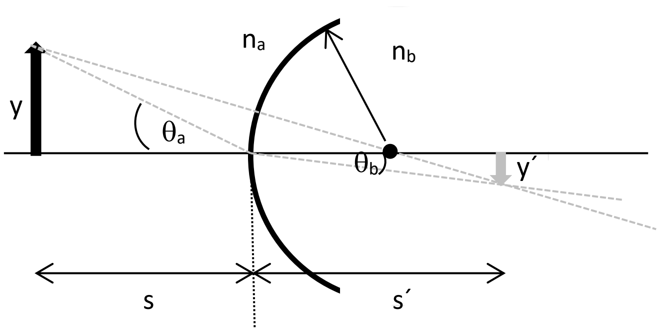
$$|F_a| = bv^2$$

e) Realice un diagrama aislado de fuerzas en estas circunstancias y plantee la ecuación correspondiente.

Las siguientes cinco consignas son sólo para el nivel 2.

f) Calcule la velocidad límite del movimiento sabiendo que $b = 6600\ kg/m$.
g) ¿Cuánto tiempo tarda el submarino en llegar al fondo del mar ($4000\ m$)? Suponga que la velocidad límite se alcanza en los primeros metros de recorrido.

Suponga ahora que en uno de los extremos el submarino cuenta con una claraboya curva de vidrio de $40\,cm$ de diámetro y radio de curvatura $R = 1\,m$. Si la ecuación que relaciona la posición del objeto observado (s) con la posición de su imagen (s') para una superficie curva es:



$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{(n_b - n_a)}{R}$$

donde n_a y n_b son los índices de refracción y sabiendo que el índice de refracción del agua es $4/3$ y el del aire es 1,

h) Calcule la posición de la imagen si el objeto se encuentra a una distancia de $4\ m$. ¿Es real o virtual?
i) A partir de la figura encuentre una expresión para la magnificación $M = y'/y$ en términos de s y s'. Recuerde trabajar en la aproximación paraxial, es decir ángulos θ_ay θ_b muy pequeños.
j) Calcule el valor de la magnificación e indique si la imagen es derecha o invertida, y si está aumentada o disminuida en tamaño.

Datos útiles:

Densidad del agua: $\rho_a = 1\ g\ cm^3$

Presión atmosférica: $P_{atm} = 1013{,}25\ hPa = 1\ atm$

Aceleración de la gravedad: $g = 10\ m\ s^{-2}$

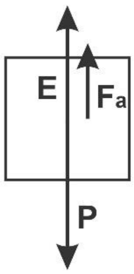
Problema Teórico 2.
Hoja de respuestas.

inciso		Puntaje
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

Las siguientes cinco consignas son sólo para el nivel 2.

f)		
g)		
h)		
i)		
j)		

Hoja de respuestas – Solución y puntaje.

		Puntaje
a-	$\frac{V_S}{V_T} = 28{,}67\%$	1 pto 0,5 ptos
b-	$P = 383610\ N$ $m_a = 27361\ kg$	2 ptos 1 pto
c-	$r_i = 0{,}72\ m$	2 ptos 1 pto
d-	$P_{ac}(mínima) = 40101{,}325\ Pa \sim 396\ atm$	2 ptos 1 pto
e-	 $P - E - bv^2 = ma$	3 ptos 1,5 ptos
f-	$v_l = 0{,}389\ m\ s^{-1}$	1,5 ptos
g-	$t = 10276\ s = 2{,}85\ h = 2h\ 51\ m$	0,5 ptos
h-	$s´ = -\frac{3}{2}m = -1{,}5m$ La imagen es virtual.	1 pto
i-	$M = -\frac{n_{agua}}{n_{aire}}\frac{s'}{s} = \frac{4}{3}\frac{s'}{s}$	1 pto
j-	$M = \frac{1}{2}$ La imagen está derecha y disminuida a la mitad.	1 pto

Solución

a- Planteando el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el submarino,

$$\vec{P} + \vec{E} = 0$$

Donde $\vec{P} = -M\ g\ \hat{k}$ es el peso del submarino y $\vec{E} = \rho_a\ V_S\ g\hat{k}$ es la fuerza de empuje con ρ_a la densidad del agua y V_S el volumen sumergido. Entonces,

$$\frac{V_S}{V_T} = \frac{M}{\rho_a\ V_T} = 0{,}2867 = 28{,}67\%$$

Donde $V_T = \frac{\pi}{4} {D_e}^2 L = 38{,}361\ m^3$ es el volumen del submarino tomándolo como un cilindro de diámetro externo $D_e = 2{,}7\ m$ y largo $L = 6{,}7\ m$.

b- Para que el submarino se sumerja completamente, el peso total del submarino debería ser igual al empuje,

$$P = M_T g = \rho_a\ V_T g = 383610\ N$$

La masa de agua que se utiliza de lastre es

$$m_a = M_T - M = 27361\ kg$$

c- La masa total de agua sería $m_T = m_a + 100\ kg = 27461\ kg$, la cual ocuparía un volumen V_a tal que

$$V_a = \frac{m_T}{\rho_a} = 27{,}461\ m^3$$

El volumen de la cámara que contiene al agua está dado por,

$$V_a = V_T - \pi {r_i}^2 L$$

$$r_i = \sqrt{\frac{V_T - V_a}{\pi\ L}} = 0{,}72\ m$$

d- La presión del aire comprimido P_{ac} debe ser mayor a la presión a la cual se encuentra el submarino P_s, la cual está dada por

$$P_s = \rho_a h g + P_{atm}$$

Donde $h = 4000\ m$ y $P_{atm} = 1013{,}25\ hPa$ es la presión atmosférica.

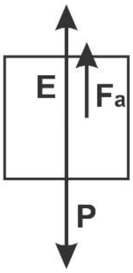
$$P_s = 40101{,}325\ Pa{\sim}396\ atm$$

Entonces, la presión mínima es

$$P_{ac}(mínima) = 40101{,}325\ Pa{\sim}396\ atm$$

e- Diagrama de fuerzas

$$P - E - bv^2 = ma$$



HASTA AQUÍ NIVEL 1

f- La velocidad límite se alcanza cuando la suma de fuerzas actuando sobre el submarino es cero,

$$\vec{F}_a + \vec{P} + \vec{E} = 0$$

Donde $\vec{F}_a = b{v_l}^2\hat{k}$, $\vec{P} = -(M_T + 100\ kg)g\hat{k}$ y $\vec{E} = V_T\rho_a g\hat{k}$

Luego,

$$v_l = \sqrt{(M_T + 100\ kg - V_T\rho_a)\frac{g}{b}}$$

$$v_l = \sqrt{100\ kg\frac{g}{b}} = 0{,}389\ m\ s^{-1}$$

g- Cuando se alcanza la velocidad límite, la aceleración es cero. Luego, el tiempo que tarda el submarino en alcanzar el fondo del mar es,

$$t = \frac{h}{v_l} = 10276\ s = 2{,}85\ h = 2h\ 51\ m$$

h- La ecuación para una superficie curva que separa los medios agua-aire es

$$\frac{n_{agua}}{s} + \frac{n_{aire}}{s'} = \frac{(n_{aire} - n_{agua})}{R}$$

Donde $s = 4\ m$ y $R > 0$ con $R = 1\ m$, entonces

$$s' = -\frac{3}{2}m = -1{,}5m < 0$$

La imagen es virtual.

i- Aplicando la Ley de Snell para el rayo que pasa por el centro de la claraboya (como se muestra en la figura),

$$n_{agua}\sin\theta_a = n_{aire}\sin\theta_b$$

En aproximación paraxial, es decir para ángulos muy pequeños,

$$\sin\theta \sim \theta \sim \tan\theta$$

Luego,

$$n_{agua}\,\theta_a = n_{aire}\theta_b \qquad (1)$$

De la figura también se puede observar que

$$\tan\theta_a = \frac{y}{s} \sim \theta_a$$

$$\tan\theta_b = \frac{-y'}{s'} \sim \theta_b$$

Reemplazando θ_a y θ_a en (1) por las expresiones recién obtenidas resulta:

$$n_{agua}\frac{y}{s} = n_{aire}\frac{-y'}{s'}$$

Luego la magnificación M está dada por,

$$M = \frac{y'}{y} = -\frac{n_{agua}}{n_{aire}}\frac{s'}{s} = -\frac{4}{3}\frac{s'}{s}$$

j- Luego la magnificación del objeto a $4\,m$ es

$$M = -\frac{4}{3}\frac{s'}{s} = -\frac{4}{3}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)m}{4\,m} = \frac{1}{2} > 0$$

La imagen está derecha y disminuida a la mitad.

Problema Teórico 3.

Una barra de cobre cilíndrica, de diámetro $d = 0{,}033\,mm$ y largo $L = 1\,m$, con una resistividad $\rho = 1{,}71\ \times 10^{-8}\Omega\,m$ se conecta a un circuito como se muestra en la figura.
El borne b del circuito se conecta a una distancia x del borne a de la barra.
El circuito se alimenta con una fuente ideal $E_0 = 3\,V$ y $R = 20\,\Omega$. Entre los bornes c y d se conecta un amperímetro real, el cual se puede modelar como un amperímetro ideal en serie con una resistencia $r_A = 5\,\Omega$.

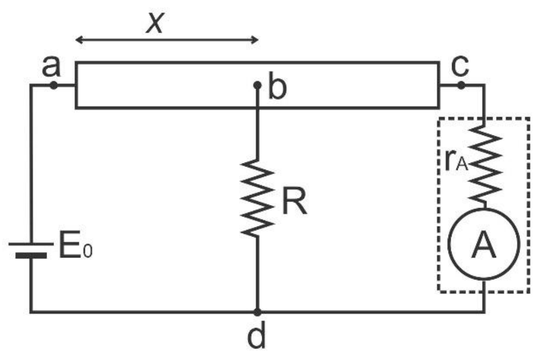


Figura. Esquema del circuito.

a) Determinar la resistencia total R_T de la barra de cobre (resistencia total entre los bornes a y c).
b) Si $x = \ 25\,cm$, determinar la resistencia equivalente del circuito R_e.
c) Determinar la caída de potencial V_{bd} entre los bornes b y d.
d) Determinar la corriente i_A medida por el amperímetro.
e) Determinar la potencia disipada por la barra de cobre P_{barra}.

Las siguientes tres consignas son sólo para el nivel 2.

f) Escriba una expresión para la corriente que circula por el amperímetro i_A en función de x.
g) Determine el valor de x para que la corriente i_A que circula por el amperímetro sea mínima. <u>Ayuda</u>: Determine el valor de x para que ${i_A}^{-1}$ tome un valor máximo.
h) Si el amperímetro es capaz de disipar una potencia máxima $P_{max} = 50\,mW$ (r_A es capaz de disipar $50\,mW$), determine el rango de x para no quemar el mismo.

Problema Teórico 3.
Hoja de Respuestas.

inciso		Puntaje
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

Las siguientes tres consignas son sólo para el nivel 2.

f)		
g)		
h)		

Solución - Hoja de Respuestas

		Puntaje
a.	$R_T = 20\ \Omega$	2 ptos 1 pto
b.	$R_e = 15\ \Omega$	2 ptos 1 pto
c.	$V_{bd} = 2\ V$	2 ptos 1 pto
d.	$i_A = 0{,}1\ A$	2 ptos 1 pto
e.	$P_{barra} = 0{,}35\ W$	2 ptos 1 pto
f.	$i_A = \frac{E_0 R}{R(R_T + r_A) + \alpha(R_T + r_a)x - \alpha^2 x^2}$ Con $\alpha = \frac{\rho}{A}$	2 ptos
g.	$x = 0{,}625\ m$	2 ptos
h.	$x\!: [0{,}25;\ 1]\ m$	1 pto

Solución:
a. Determinar la resistencia total R_T de la barra de cobre (resistencia entre los bornes a y c).

La resistencia de la barra está dada por,

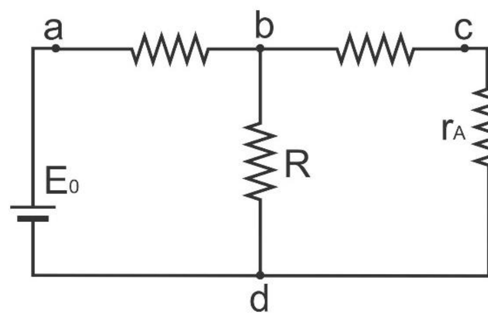
$$R_T = \rho \frac{L}{A}$$

Donde $A = \frac{\pi}{4} d^2 = 8{,}55 \times 10^{-10}\ m^2$ es el área transversal de la barra. Luego,

$$R_T = 20\ \Omega$$

b. Si $x = 25\ cm$, determinar la resistencia equivalente del circuito R_e.

Para una dada distancia x, la barra de cobre se puede considerar como dos resistencias R_1, resistencia de la barra de longitud x (resistencia entre los bornes a y b) y R_2, resistencia de la barra de longitud $(L - x)$ (resistencia entre los bornes b y c), como se muestra en la figura



De acuerdo a la expresión utilizada en el inciso a.,

$$R_1 = 5\ \Omega$$
$$R_2 = 15\ \Omega$$

La resistencia equivalente R_e es

$$R_e = R_1 + [R\ //\ (R_2 + r_A)]$$

Donde $R\ //\ (R_2 + r_A) = 10\ \Omega$ es la resistencia equivalente de la conexión en paralelo de la resistencia $R = 20\ \Omega$ y $R_2 + r_A = 15\ \Omega + 5\ \Omega = 20\ \Omega$.

$$R_e = 5\ \Omega + 10\ \Omega = 15\ \Omega$$

c. Determinar la caída de potencial V_{bd} entre los bornes b y d.

La caída de potencial V_{bd} es,

$$V_{bd} = E_0 - i_0 R_1$$

Donde i_0 es la corriente entregada por la fuente,

$$i_0 = \frac{E_0}{R_e} = 0{,}2\ A$$

Con lo cual,

$$V_{bd} = 2\ V$$

d. Determinar la corriente i_A medida por el amperímetro.

La corriente i_A está dada por,

$$i_A = \frac{V_{bd}}{R_2 + r_A} = 0{,}1\ A$$

e. Determinar la potencia disipada por la barra de cobre P_{barra}.

$$P_{barra} = i_0 V_{ab} + i_A V_{cd} = R_1 i_0^2 + R_2 i_A^2 = 0{,}35\ W$$

f. Escriba una expresión para la corriente que circula por el amperímetro i_A en función de x.

Sea $R_2^* = R_2 + r_A$, y de acuerdo a los incisos anteriores,

$$i_A = \frac{V_{bd}}{R_2^*} = \frac{E_0 - i_0 R_1}{R_2^*} = \frac{E_0 - \frac{E_0}{R_e}\ R_1}{R_2^*} = \frac{E_0}{R_2^*}\left(1 - \frac{R_1}{R_e}\right)$$

Donde

$$R_e = R_1 + [R \mathbin{//} R_2^*] = R_1 + \frac{R\ R_2^*}{R + R_2^*}$$

$$i_A = \frac{E_0}{R_2^*}\frac{R_e - R_1}{R_e} = \frac{E_0}{R_2^*}\left(\frac{R\ R_2^*}{R + R_2^*}\right)\frac{1}{R_e} = \frac{E_0 R}{R_1(R + R_2^*) + R R_2^*}$$

El divisor se puede escribir como

$$R_1(R + R_2^*) + R R_2^* = R(R_1 + R_2 + r_A) + R_1 R_2 + R_1 r_A = R(R_T + r_A) + R_1 R_2 + R_1 r_A$$

Donde $R_T = R_1 + R_2$

Sea $\alpha = \frac{\rho}{A}$, con lo cual

$$R_1(R + R_2^*) + RR_2^* = R(R_T + r_A) + \alpha^2 x(L - x) + \alpha r_A x$$

$$i_A = \frac{E_0 R}{R(R_T + r_A) + \alpha(R_T + r_a)x - \alpha^2 x^2}$$

g. Determine el valor de x para que la corriente i_A que circula por el amperímetro sea mínima. Ayuda: Determine el valor de x para que ${i_A}^{-1}$ tome un valor máximo.

$$\frac{1}{i_A} = \frac{1}{E_0 R}[R(R_T + r_A) + \alpha(R_T + r_a)x - \alpha^2 x^2]$$

${i_A}^{-1}$ es una función cuadrática de x con las ramas hacia abajo ($\alpha^2 > 0$), la posición del vértice (x_v) de la parábola es el valor máximo para ${i_A}^{-1}$, con lo cual corresponde al valor mínimo de i_A.

$$x_v = -\frac{\alpha(R_T + r_a)}{-2\alpha^2} = 0{,}625\, m$$

h. Si el amperímetro es capaz de disipar una potencia máxima $P_{max} = 50\, mW$ (r_A es capaz de disipar $50\, mW$), determine el rango de x para no quemar el mismo.

Dada la potencia máxima, la corriente máxima que soporta el amperímetro es,

$$i_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{r_A}} = 100\, mA$$

Para $x_v = 0{,}625\, m$, la corriente que circula por el amperímetro es $i_A = 91{,}4\, mA$. Para $x = 0\, m$, ${i_A}^{-1}(x = 0\, m) = 8{,}33\, A^{-1}$, lo que equivale a una corriente de $120\, mA$. Mientras que para $x = 1\, m$, ${i_A}^{-1}(x = 1\, m) = 10\, A^{-1}$, lo que equivale a una corriente de $100\, mA$. Luego, $x_{max} = 1\, m$.
Como ${i_A}^{-1}$ es una parábola, la cual es simétrica respecto al vértice, $x_{min} = x_v - (x_{max} - x_v) = 0{,}25\, m$. Entonces, el rango de x es $[0{,}25;\ 1]\, m$.